14 Der Spektralsatz für normale Operatoren auf Hilberträumen

14.1. Motivation: 1) Sei $\dim \mathcal{H} < \infty$ und $A = A^* \in B(\mathcal{H})$

$\sigma(A) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k\} \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{H}_\lambda := \ker(A - \lambda I)$ Eigenraum zu $\lambda \in \sigma(A)$

P_λ Projektion auf $\mathcal{H}_\lambda$

Spektralsatz:
- $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{H}_\lambda$, d.h. $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I$

  $P_\lambda P_\mu = 0 \quad (\lambda \neq \mu)$

- $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ \mathcal{H}_{\lambda_1} \\ \\ \\ \}\ \mathcal{H}_{\lambda_k} \end{matrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\mathcal{H}_{\lambda_1}} \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{\mathcal{H}_{\lambda_k}}$$

2) Es gilt analoge Darstellung auch für **kompakte** s.a. Operatoren für $\dim \mathcal{H} = \infty$,

allerdings $\sigma(A)$ nun eventuell abzählbar unendlich

3) Ziel: Verallgemeinerung auf beliebige **beschränkte** s.a. Operatoren für $\dim \mathcal{H} = \infty$

Problem: Es gibt i.a. keine Eigenvektoren für $\lambda \in \sigma(A)$.

14.2 Beispiel: $\mathcal{H} = L_2[0,1]$

$$= \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty \}$$

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

$$f \mapsto Af \quad \text{mit} \quad (Af)(t) = t\, f(t)$$

$$\langle g, Af \rangle = \int g(t) \, \overline{t\, f(t)} \, dt$$

$$= \int t\, g(t) \, \overline{f(t)} \, dt$$

$$= \langle Ag, f \rangle \qquad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow A = A^*$$

$$\|Af\|^2 = \int_0^1 |t f(t)|^2 \, dt \leq \int |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq 1 \qquad \text{d.h.} \quad A \in B(\mathcal{H})$$

Es gilt: $\sigma(A) = [0,1]$ (Übungsaufgabe !)

aber es gibt keine Eigenvektoren:

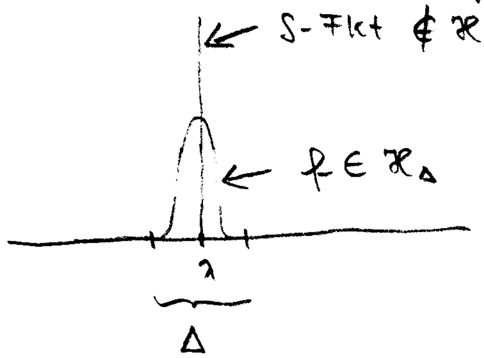
$$Af = \lambda f \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

$\Rightarrow t f(t) = \lambda f(t)$ (f.s.) $\forall t$ $\Rightarrow f \equiv 0$ (bzw. $f \hat{=}$ Delta-Fkt $\notin \mathcal{H}$)

Somit Darstellung

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda \quad \text{sinnlos, da alle} \quad P_\lambda = 0$$

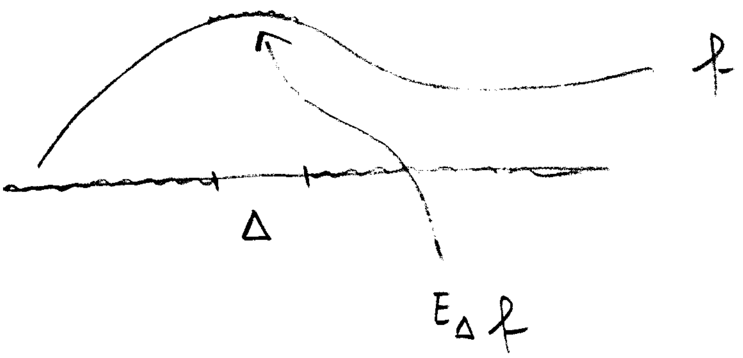
aber: $\exists$ approximierende Eigenvektoren $\hat{=}\ \mathcal{H}_\Delta$ für Intervalle Δ



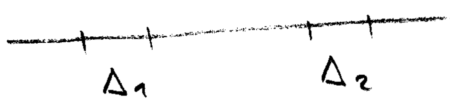
$\mathcal{H}_\Delta \ \hat{=}$ Fkten, die in Δ lokalisiert sind

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{H}_\Delta \\ |\Delta| \text{ klein} \end{array}\right\} \Rightarrow A f \approx \lambda f$$

Sei $E(\Delta): \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\Delta$ orth. Projektion ($\Delta \subset \mathbb{R}$ Intervall)



also: - $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \Rightarrow E(\Delta_1)E(\Delta_2) = 0$



- $\Delta = \Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \Rightarrow E(\Delta) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$

insbesondere

$$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \Delta_i \Rightarrow I = \sum_{i=1}^{n} E(\Delta_i)$$

(beliebig verfeinerbar, aber i.a. keine kleinste Zerleg.)

Darstellung von A ?

$$\left.\begin{array}{l} |\Delta| \text{ klein} \\ f \in \mathcal{H}_\Delta \end{array}\right\} \Rightarrow Af \approx \lambda f \qquad (\lambda \in \Delta)$$

also: $$Af = \sum_i \underbrace{A\,E(\Delta_i) f}_{\approx\, \lambda_i E(\Delta_i) f} \qquad (\lambda_i \in \Delta_i)$$

$$\Rightarrow \quad A \mathrel{\hat{=}} \lim_{|\Delta_i| \to 0} \sum_i \lambda_i E(\Delta_i) \mathrel{\hat{=}} \int \lambda \, dE(\lambda)$$

mit $E(\lambda) = E(-\infty, \lambda]$

"operator-wertiges" Integral

bzgl dem "Spektralmaß" $\Delta \mapsto E(\Delta)$

Problem: - $E(\Delta)$ Spektralmaß $\rightsquigarrow$ def. $\int \lambda \, dE(\lambda)$,

bzw. allg. $\int f(\lambda)\, dE(\lambda)$

- zeige: $A = A^*$ $\Rightarrow$ $\exists$ Spektralmaß mit

(Spektralsatz) $\qquad A = \int \lambda \, dE(\lambda)$ und

$$f(A) = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$$

beachte: $f = 1_\Delta$ $\qquad \left(1_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & t \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \right)$

$$\Rightarrow \quad 1_\Delta(A) = \int 1_\Delta(\lambda)\, dE(\lambda) = E(\Delta)$$

also Spektralsatz $\mathrel{\hat{=}}$ allgemeinerer Funktionalkalkül

$$E(\Delta) \quad \Longleftrightarrow \langle E(\Delta)x, y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$\overset{\text{Polarisierung}}{\Longleftrightarrow} \quad \langle E(\Delta)x, x\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\overset{!!}{=}$$

$$E_x(\Delta) \qquad E_x \text{ Maß auf } \mathbb{R}$$

$$\left\langle \int f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x, x \right\rangle = \int f(\lambda)\, dE_x(\lambda)$$

Exkurs: Maß- und Integrationstheorie

E 1. Definition: 1) Sei $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-Algebra, d.h. die kleinste Menge von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die

- alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ enthält
- abgeschlossen ist unter Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung:

$$\mathbb{R} \in \mathfrak{A}$$

$$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$$

$$A_n \in \mathfrak{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$$

2) Ein (Borel-) Maß μ auf $\mathbb{R}$ ist eine Fkt

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty)$$

mit:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $$\left.\begin{array}{l} A_n \in \mathfrak{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ A_n \cap A_m = \emptyset \\ \quad (n \neq m) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

(σ-Additivität)

3) Das durch $\lambda[a,b] = b-a$ bestimmte Maß heißt Lebesgue-Maß λ.

E2. Satz und Def.: Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}$ so dass $\mu(K) < \infty$ $\forall$ kompakten K.

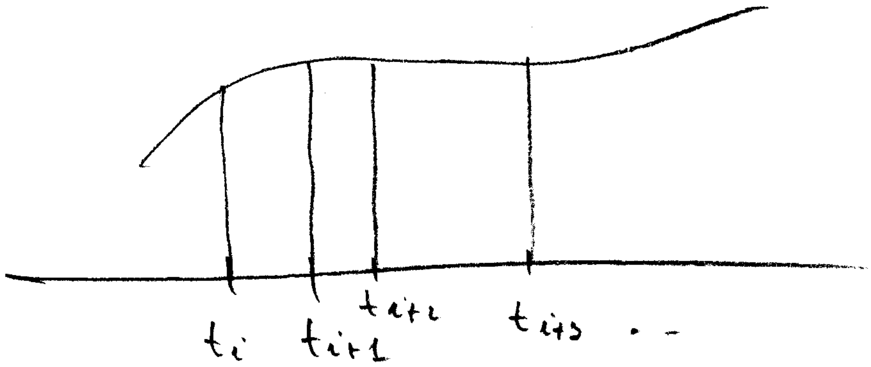
Für jede stetige beschränkte Fkt

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

existiert der Grenzwert

$$\int f(t)\, d\mu(t) := \lim_{\sup\{|t_{i+1}-t_i|\} \to 0} \sum f(t_i)\,\{\mu((t_i, t_{i+1}])\}$$

und heißt Riemann-(Stieltjes-) Integral von f bzgl. μ.



Die Klasse der Riemann-integrierbaren Fkten ist zu klein für theoretische Zwecke, insbesondere Studium von Grenzwerten

$\rightsquigarrow$ Ausdehnung auf meßbare Fkten

E3. Def.: Eine Fkt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, falls

$f^{-1}(A) \in \mathfrak{a}$ für alle $A \in \mathfrak{a}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist meßbar, falls $\operatorname{Im} f$ und $\operatorname{Re} f$ meßbar.

E4. Bem: 1) Die meßbaren Fkten sind die kleinste Klasse von Fkten, die die stetigen Fkten enthält und die unter punktweiser Konvergenz abgeschlossen ist.

2) Jede konstruktiv definierbare Fkt ist meßbar. Die Existenz nicht-meßbarer Fkten bedarf des Auswahlaxioms.

E5. Satz und Def.: 1) Def. von $\int f(t)\, d\mu(t)$ auf alle positiven meßbaren Fkten ausdehnbar

$$\left.\begin{matrix} f \text{ meßbar} \\ f \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int f(t)\, d\mu(t) \in [0, \infty] \text{ wohldefiniert}$$

Lebesgue-(Stieltjes-) Integral

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ meßbar heißt integrierbar $:\Leftrightarrow \int |f(t)|\, d\mu(t) < \infty$

$$L^p(\mu) := \{ f \mid f \text{ meßbar}, \ \|f\|_p^p := \int |f(t)|^p\, d\mu(t) < \infty \}$$

$(1 \leq p < \infty)$

fast / siehe E-3a

E6. Bem: $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ f.s.

$\iff \{t \mid f(t) \neq 0\}$ ist Nullmenge bzgl. μ,

d.h.

$\mu\{t \mid f(t) \neq 0\} = 0$

Wir identifizieren zwei Fkten, die sich nur auf Nullmengen unterscheiden

$\Rightarrow L^p$ ist Banachraum für $1 \leq p < \infty$

Hilbertraum $p = 2$

(Satz von Lebesgue)

E7. Satz von der majorisierten Konvergenz: Sei μ Maß und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge meßbarer Fkten, die punktweise konvergieren.

Sei $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ $(\Rightarrow f$ meßbar$)$

Falls ein $g \in L^1(\mu)$ existiert mit

$$|f_n(t)| \leq g(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dann ist $f \in L^1(\mu)$ und es gilt:

$$\int f(t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\,d\mu(t)$$

E8. Def.: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir setzen

$$M_\infty(K) := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ meßbar und beschränkt} \}.$$

komm. C^*-Algebra bzgl $\|f\| = \sup_{t\in K} |f(t)|$ und $f^*(t) = \overline{f(t)}$

E9. Bem.: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt.

1) μ kann auch als Element von $C(K)^*$ betrachtet werden:

$$\mu : C(K) \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \mu(f) := \int_K f(t)d\mu(t)$$

- μ linear

- $$\left|\int f(t)\,d\mu(t)\right| \leq \|f\|_{C(K)} \cdot \underbrace{\int_K 1\,d\mu(t)}_{\mu(K)}$$

d.h. $\|\mu\| = \mu(K)$, also $\mu \in C(K)^*$ falls $\mu(K) < \infty$

- μ positiv:

$$f \geq 0 \implies \mu(f) \geq 0$$

2) Sei $\mu(K) < \infty$. Dann ist Maß μ also im wesentlichen Ausdehnung von

$$\mu : C(K) \to \mathbb{C}$$

zu

$$\mu : \mathcal{M}_\infty(K) \to \mathbb{C}$$

3) Es gilt nun auch Umkehrung von 1), d.h. jedes positive Element in $C(K)^*$ entspricht einem Maß, kann also von $C(K)$ auf $\mathcal{M}_\infty(K)$ ausgedehnt werden.

E 9. Satz von Riesz: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $L \in C(K)^*$.

1) Ist L positiv, d.h. $L(f) \geq 0$ für $f \geq 0$, so gibt es ein Maß μ mit $\mu(K) = \|L\| < \infty$ und

$$L(f) = \int_K f(t)\, d\mu(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

μ ist auf Teilmengen von K eindeutig durch L bestimmt. ($\mu|_K \mathrel{\hat{=}}$ Maß auf K)

2) Für beliebiges $L \in C(K)^*$ gibt es ein Maß μ auf K mit $\mu(K) = \|L\| < \infty$ und eine meßbare Funktion $\gamma : K \to \mathbb{C}$ mit $|\gamma(t)| = 1 \quad \forall t \in K$, so daß gilt

$$L(f) = \int_K f(t)\,\gamma(t)\, d\mu(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

E 10. Korollar: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann kann jedes $L \in C(K)^*$ eindeutig zu einem Element $\tilde{L} \in \mathcal{M}_\infty(K)^*$ fortgesetzt werden.

Beweis: $L \in C(K)^* \Rightarrow \exists \mu, \gamma$

$$L(f) = \int_K f(t)\,\gamma(t)\,d\mu(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

Definiere

$$\tilde{L}(h) = \int_K f(t)\,\gamma(t)\,d\mu(t) \qquad \forall h \in \mathcal{M}_\infty(K)$$

$\Rightarrow \tilde{L}$ linear

$$|\tilde{L}(h)| \le \|f\|\,\|\gamma\| \underbrace{\int_K 1\,d\mu(t)}_{= \mu(K) = \|L\| < \infty}$$

$\Rightarrow \|\tilde{L}\| = \|L\| < \infty$

d.h. $\tilde{L} \in \mathcal{M}_\infty(K)^*$ □

E 11. Bem: Ein Maß μ ist also eine positive lineare Abb.

$\mu : C(K) \to \mathbb{C}$,

und kann eindeutig zu positiven linearen Abb.

$\tilde{\mu} : \mathcal{M}_\infty(K) \to \mathbb{C}$

ausgedehnt werden. Der Zushg zwischen diesen und der Def E.1 ist:

$\mu(M) = \tilde{\mu}(1_M)$ bzw. $\tilde{\mu}(h) = \int h(t)\,d\mu(t) \quad \forall h \in \mathcal{M}_\infty(K)$

E.12. Def: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und f_n $(n \in \mathbb{N})$, $f : K \to \mathbb{C}$

Wir sagen f_n konvergiert beschränkt pktweise gegen f, falls gilt

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t) \qquad \forall t \in K$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\sup_{t \in K} |f_n(t)|}_{\|f_n\|_{C(K)}} < \infty$$

Notation: $f_n \to f$ beschr. pktweise

E.13. Satz: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist

$\mathcal{M}_\infty(K) := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f$ meßbar und beschr. $\}$

die kleinste Teilmenge $\mathcal{M}$ von Fkten von $K \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

(i) $C(K) \subset \mathcal{M}$

(ii) $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter beschränkt pktweiser Konvergenz

Beweisskizze: beachte: $\mathcal{M}_\infty(K)$ erfüllt (i)

[stetige Fkten sind meßbar und, da K kompakt, beschränkt]

und (ii) [nach Satz E.7 von Lebesgue]

$\Rightarrow \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\infty(K)$

für andere Richtung: man zeigt, dass

$\mathcal{G} := \{ A \subset K \mid 1_A \in \mathcal{M} \}$

σ-Algebra ist (dazu zeige: $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow \max(f,g) \in \mathcal{M}$)

Da man 1_I für Intervalle I durch stetige Fkten beschr. pktweise appr. kann, folgt {Intervalle} $\subset \mathcal{G}$

$\Rightarrow \underbrace{\mathfrak{A}}_{\text{Borel-}\sigma\text{-Alg.}} \subset \mathcal{G}$

$\Rightarrow 1_A \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathfrak{A}$

zeige: $\mathcal{M}$ Vektorraum

$\Rightarrow$ einfache Fkten $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ $(A_i \in \mathfrak{A})$

sind in $\mathcal{M}$

beliebige $f \in \mathcal{M}_\infty(K)$ können durch einfache g_n beschr. pktweise appr. werden

$\Rightarrow \mathcal{M}_\infty(K) \subset \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty(K)$ $\square$

14.3 Satz (meßbare Funktionalkalkül für normale Operatoren):

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in B(\mathcal{H})$ normal.

Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$$

$$h \mapsto \tilde{\Phi}(h) =: h(A)$$

mit $\tilde{\Phi}(z) = A$ (wobei $z(\lambda) = \lambda$) und

$$\left.\begin{array}{l} h_n \ (n \in \mathbb{N}),\ h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \\ h_n \to h \text{ beschr. pktweise} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle \tilde{\Phi}(h_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \tilde{\Phi}(h)x, y\rangle$$

$$\forall x, y \in \mathcal{H}$$

Es gilt: $\tilde{\Phi}$ ist stetig und $\|\tilde{\Phi}\| = 1$.

14.4 Bem: 1) $\tilde{\Phi}$ stetig bedeutet

$$h_n \to h \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Phi}(h_n) \to \tilde{\Phi}(h)$$

(d.h. $\|h - h_n\|_{sup} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|h_n(A) - h(A)\| \to 0$

2) $\operatorname{ran} \tilde{\Phi} = vN(A)$ ist die von A erzeugte von Neumann (oder W^*-) Algebra, d.h. die kleinste C^*-Algebra, die A enthält und unter der sogenannten schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist.

$$\left(\text{d.h. } \left.\begin{array}{l} \lim \langle B_n x, y\rangle = \langle Bx, y\rangle \\ \forall x, y \in \mathcal{H} \\ B_n \in vN(A) \end{array}\right\} \Rightarrow B \in vN(A) \right)$$

Beweis: Eindeutigkeit: $\tilde{\Phi}$ ist nach 13.8 Erweiterung von $\Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$, also auf $C(\sigma(A))$ eindeutig bestimmt

Seien Φ_1 und Φ_2 zwei solche Erweiterungen

Setze $\mathcal{M} := \{ f \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \mid \Phi_1(f) = \Phi_2(f) \}$

Vor. $\Rightarrow C(\sigma(A)) \subset \mathcal{M}$

(ii) Sei $f_n \in \mathcal{M}$ und $h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$ mit $f_n \to h$ beschr. pktweise

$$\Rightarrow \langle \Phi_1(h)x, y\rangle = \lim \langle \underbrace{\Phi_1(f_n)}_{= \Phi_2(f_n)} x, y\rangle = \langle \Phi_2(h)x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \Phi_1(h) = \Phi_2(h) \quad \overset{E.13}{\Rightarrow} \mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$$

Existenz: Sei $\Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$ der stetige Funktionalkalkül aus 13.8.

Für $x, y \in \mathcal{H}$ definiere

$$\mu_{x,y}(f) := \langle \Phi(f)x, y\rangle \qquad \forall f \in C(\sigma(A))$$

$\Rightarrow$ - $\mu_{x,y}$ linear in f

- $$|\mu_{x,y}(f)| = |\langle \Phi(f)x, y\rangle| \le \underbrace{\|\Phi(f)x\|}_{\le \underbrace{\|\Phi(f)\|}_{\|f\|} \|x\|} \|y\|$$

$\Rightarrow \|\mu_{x,y}\| \le \|x\| \|y\|$, also $\mu_{x,y} \in C(\sigma(A))^*$

$\overset{\text{Riesz}}{\underset{\text{E 10}}{\Longrightarrow}}$ $\mu_{x,y}$ kann zu $\tilde{\mu}_{x,y} \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))^*$

fortgesetzt werden mit $\|\tilde{\mu}_{x,y}\| = \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Sei nun $h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$

$\Rightarrow$ $\tilde{\mu}_{x,y}(h)$ $\forall x,y$ definiert

noch z.z.: $\exists B_h \in B(\mathcal{H})$ mit $\langle B_h x, y \rangle = \tilde{\mu}_{x,y}(h)$

dazu: $y \mapsto L(y) := \tilde{\mu}_{x,y}(h)$ anti-linear und beschränkt, denn

- $\mu_{x,\alpha y_1 + \beta y_2}(f) = \bar{\alpha}\mu_{x,y_1}(f) + \bar{\beta}\mu_{x,y_2}(f) \quad \forall f \in C(\sigma(A))$

$$\Downarrow$$

$\tilde{\mu}_{x,\alpha y_1+\beta y_2}(h) = \bar{\alpha}\tilde{\mu}_{x,y_1}(h) + \bar{\beta}\mu_{x,y_2}(h) \quad \forall h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$

- $\|\tilde{\mu}_{x,y}\| \leq \|x\|\,\|y\| \Rightarrow |\tilde{\mu}_{x,y}(h)| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|h\|$

$\Rightarrow \|L\| \leq \|x\|\,\|h\|$

$\overset{\text{Riesz}}{\underset{2.16}{\Longrightarrow}}$ $z_h \in \mathcal{H}$ mit $\tilde{\mu}_{x,y}(h) = \langle z_h, y \rangle$

Definiere B_h durch $B_h x = z_h$

$\mu_{x,y}$ linear in x $\Rightarrow$ z_h linear in x $\Rightarrow$ B_h linear

$\|B_h x\| = \|z_h\| = \|L\| \leq \|x\|\,\|h\| \Rightarrow \|B_h\| \leq \|h\|$

$\Rightarrow B_h \in B(\mathcal{H})$

Setze nun $\tilde{\Phi}(h) = h(A) := B_h$

Eigenschaften: - $\tilde{\Phi} \mid C(\sigma(A)) = \Phi$ nach Def.

- $\tilde{\Phi}$ linear: $\mu_{x,y}(h)$ linear in $h \Rightarrow z_h$ linear in h

$\Rightarrow B_h$ linear in h

- $\| \tilde{\Phi}(h) \| = \| B_h \| \leq \| h \|$

$\Rightarrow \tilde{\Phi} \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))'$ und $\| \tilde{\Phi} \| \leq 1$

Da $\| \Phi \| = 1 \Rightarrow \| \tilde{\Phi} \| = 1$

- $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z) = A$

- Sei $h_n \to h$ beschr. pktweise

$$\overset{\text{Lebesgue}}{\underset{\text{E.7.}}{\Longrightarrow}} \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu_{x,y}(h_n)}_{\lim_{n\to\infty} \langle \tilde{\Phi}(h_n)x,y \rangle} = \underbrace{\mu_{x,y}(h)}_{\langle \tilde{\Phi}(h)x,y \rangle} \qquad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

- ~~$\tilde{\Phi}(\bar{h}) = \tilde{\Phi}(h)^*$?~~

~~Sei $f_n \to h$ beschr. pktweise mit $f_n \in C(\sigma(A))$ $\Rightarrow \bar{f}_n \to \bar{h}$ beschr. pktweise~~

~~$\Rightarrow \Phi(\bar{f}_n) = \Phi(f_n)^*$~~

~~$\Rightarrow \langle \tilde{\Phi}(\bar{h})x,y \rangle = \lim \langle \underbrace{\Phi(\bar{f}_n)}_{\Phi(f_n)^*} x,y \rangle = \overline{\langle \tilde{\Phi}(h)y,x \rangle} = \langle \tilde{\Phi}(h)^* x,y \rangle$~~

~~$\overline{\langle \Phi(f_n)y,x \rangle}$ $\forall x,y \in \mathcal{H}$~~

~~$\Rightarrow \tilde{\Phi}(\bar{h}) = \tilde{\Phi}(h)^*$~~

*- Homomorphismus - Eigenschaften übertragen sich von $C(\sigma(A))$ auf $\mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$

z. B. : $\tilde{\Phi}(\bar{h}) = \tilde{\Phi}(h)^*$?

Setze $\mathcal{M} := \{ f \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \mid \tilde{\Phi}(\bar{f}) = \tilde{\Phi}(f)^* \}$

$\overset{13.8.}{\Longrightarrow} \quad C(\sigma(A)) \subset \mathcal{M}$

Sei $f_n \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$ mit

$f_n \to h$ beschr. punktweise $\Rightarrow \bar{f}_n \to \bar{h}$ b pktw.

$$\Rightarrow \langle \tilde{\Phi}(\bar{h}) x, y \rangle = \lim \langle \underbrace{\tilde{\Phi}(\bar{f}_n)}_{\tilde{\Phi}(f_n)^*} x, y \rangle$$

$$= \lim \underbrace{\langle x, \tilde{\Phi}(f_n) y \rangle}_{\overline{\langle \tilde{\Phi}(f_n) y, x \rangle}}$$

$$= \overline{\langle \tilde{\Phi}(h) y, x \rangle}$$

$$= \langle x, \tilde{\Phi}(h) y \rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

$$= \langle \tilde{\Phi}(h)^* x, y \rangle \qquad - \text{"} -$$

$\Rightarrow \tilde{\Phi}(\bar{h}) = \tilde{\Phi}(h)^* \quad \Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$ $\square$

14.5. Def.: Sei $A \in B(\mathcal{H})$ normal und $\tilde{\Phi}$ der Funktionalkalkül von A. Bezeichne $\mathfrak{a}(\sigma(A))$ die Borel-meßbaren Mengen in $\sigma(A)$. Für $M \in \mathfrak{a}(\sigma(A))$ sei 1_M die charakteristische Funktion von M, d.h.

$$1_M(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in M \\ 0 & \lambda \notin M \end{cases}$$

Wir definieren dann

$$E : \mathfrak{a}(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$$

durch

$$E(M) := \tilde{\Phi}(1_M) = 1_M(A)$$

14.6. Satz: Die in 15.5. definierte Abb.

$$E : \mathfrak{a}(K) \longrightarrow B(\mathcal{H}) \qquad (K := \sigma(A))$$

hat die folgenden Eigenschaften:

a) $E(M)$ ist orthogonale Projektion $\forall M \in \mathfrak{a}(K)$

$$E(\phi) = 0$$

$$E(K) = 1$$

b) $E(M_1 \cap M_2) = E(M_1)E(M_2) \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{a}(K)$

c) $E(M_1 \cup M_2) = E(M_1) + E(M_2) \quad \forall M_1, M_2 \in \mathfrak{a}(K)$ mit $M_1 \cap M_2 = \phi$

d) Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist

$E_x : M \mapsto E_x(M) := \langle E(M)x, x \rangle$ ein Maß auf K

<u>Beweis:</u> a) $E(M)^2 = \tilde{\Phi}(1_M)\cdot\tilde{\Phi}(1_M)$

$$= \tilde{\Phi}(\underbrace{1_M \cdot 1_M}_{1_M})$$

$$= E(M)$$

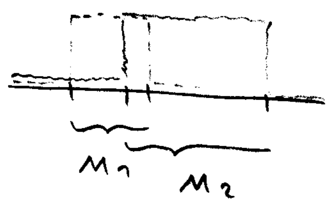
$$E(M)^* = \tilde{\Phi}(1_M)^* = \tilde{\Phi}(\overline{1}_M) = \tilde{\Phi}(1_M) = E(M)$$

$\Rightarrow$ $E(M)$ orth. Projektion

1_ϕ = Null-Fkt $\Rightarrow$ $\tilde{\Phi}(1_\phi) = 0$

1_K = Eins-Fkt $\Rightarrow$ $\tilde{\Phi}(1_K) = 1$

b) $1_{M_1 \cap M_2} = 1_{M_1}\cdot 1_{M_2}$



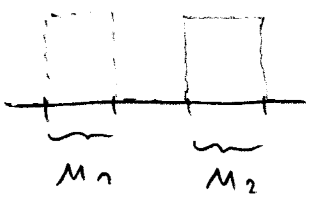
$\Rightarrow E(M_1 \cap M_2) = \tilde{\Phi}(1_{M_1\cap M_2})$

$$= \tilde{\Phi}(1_{M_1}\cdot 1_{M_2})$$

$$= \tilde{\Phi}(1_{M_1})\cdot\tilde{\Phi}(1_{M_2})$$

$$= E(M_1)\,E(M_2)$$

c) $M_1 \cap M_2 = \phi \Rightarrow 1_{M_1\cup M_2} = 1_{M_1} + 1_{M_2}$



$\Rightarrow E(M_1 \cup M_2) = \tilde{\Phi}(1_{M_1\cup M_2})$

$$= \tilde{\Phi}(1_{M_1} + 1_{M_2})$$

$$= \tilde{\Phi}(1_{M_1}) + \tilde{\Phi}(1_{M_2})$$

$$= E(M_1) + E(M_2)$$

d) Vgl. E II

2.2.1 $\mu_{x,x}$ ist positiv auf $C(K)$

dann ist $E_x(M) = \tilde{\mu}_{x,x}(1_M) = \langle \underbrace{1_M(A)}_{E(M)} x, x \rangle$

Maß auf K

Sei $f \geq 0$ auf $K \Rightarrow \sqrt{f} \in C(K)$

$f \in C(K)$ und $\sqrt{f} \geq 0$

Setze $g := \sqrt{f}$

$$\Rightarrow \mu_{x,x}(f) = \langle f(A)x, x \rangle$$
$$= \langle g(A) \cdot g(A) x, x \rangle$$
$$= \langle g(A)x, \underbrace{g(A)^*}_{g(A)} x \rangle$$
$$\geq 0$$

□

Beachte insbesondere, dass nun auch gilt:

$$\langle h(A)x, x \rangle = \tilde{\mu}_{x,x}(h) = \int h(\lambda)\, dE_x(\lambda)$$

$$\forall h \in \mathcal{M}_\infty(K)$$

14.7 Def.: Eine Abb.

$E : \mathfrak{A}(K) \to B(\mathcal{H}) \qquad (K \subset \mathbb{C} \text{ kompakt})$

mit den in 14.6 genannten Eigenschaften a) – d)

heißt <u>Spektralmaß auf K</u>.

<u>**14.8 Satz:**</u> Sei E ein Spektralmaß auf K. Dann gibt es zu jedem $h \in \mathcal{M}_\infty(K)$ einen eindeutig bestimmten Operator $\int h(\lambda)\, dE(\lambda) \in B(\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle \int h(\lambda)\, dE(\lambda) x, x \rangle = \int h(\lambda)\, dE_x(\lambda) \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(ii) $\| \int h(\lambda)\, dE(\lambda) x \|^2 = \int |h(\lambda)|^2\, dE_x(\lambda) \quad \forall x \in \mathcal{H}$

Die Abbildung $h \mapsto \int h(\lambda)\, dE(\lambda)$ ist ein $*$-Homomorphismus von $\mathcal{M}_\infty(K)$ in $B(\mathcal{H})$.
(also insbesondere stetig, vgl. 13.9)
(also z.B. $\int h(\lambda)\, dE(\lambda)^* = \int \bar{h}(\lambda)\, dE(\lambda)$

$$\int h(\lambda) g(\lambda)\, dE(\lambda) = \int h(\lambda)\, dE(\lambda) \cdot \int g(\lambda)\, dE(\lambda))$$

<u>Beweis:</u> Idee: Jede Fkt in $\mathcal{M}_\infty(K)$ kann in sup-Norm durch Fkten der Form

$$h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{M_j} \qquad (\alpha_j \in \mathbb{C},\ M_j \in \mathfrak{A})$$

approximiert werden.

Def. Integral für diese, zeige gewünschte Eigenschaften und setze stetig linear fort.