Sei $h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{M_j}$

Def. $\int h(\lambda) dE(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j E(M_j)$

(beachte: Ergebnis hängt nicht von spezieller Wahl der Darstellung ab)

$h \mapsto \int h(\lambda) dE(\lambda)$ ist $*$-Homomorphismus, da

- linear ✓

- $*$: $h = \sum \alpha_j 1_{M_j} \Rightarrow \bar{h} = \sum \bar{\alpha}_j 1_{M_j}$

$$\Rightarrow \int \bar{h}(\lambda) dE(\lambda) = \sum \underbrace{\bar{\alpha}_j E(M_j)}_{(\alpha_j E(M_j))^*} = \left(\int h(\lambda) dE(\lambda)\right)^*$$

- multiplikativ: $h = \sum \alpha_i 1_{M_i}$, $g = \sum \beta_i 1_{M_i}$

mit M_i paarweise disjunkt

(möglich solche Darstellungen zu finden $\rightsquigarrow$ gemeinsame Verfeinerungen)

$$\Rightarrow \left(\int h(\lambda) dE(\lambda)\right) \cdot \left(\int g(\lambda) dE(\lambda)\right) =$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \underbrace{E(M_i) E(M_j)}_{E(M_i \cap M_j) = \begin{cases} E(\emptyset) = 0 & i \neq j \\ E(M_i) & i = j \end{cases}}$$

$$= \sum_i \alpha_i \beta_i E(M_i)$$

$$= \int (h \cdot g)(\lambda) dE(\lambda) \qquad (h \cdot g = \sum \alpha_i \beta_i 1_{M_i})$$

$$\left\| \int h(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 = \left\langle \int h(\lambda)\, dE(\lambda)\, x, \int h(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \right\rangle$$

$$= \Big\langle \underbrace{\int \bar{h}(\lambda)\, dE(\lambda) \int h(\lambda)\, dE(\lambda)}_{\int |h(\lambda)|^2\, dE(\lambda)}\, x, x \Big\rangle$$

$$= \int |h(\lambda)|^2\, dE_x(\lambda)$$

insbesondere:

$$\left\| \int h(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 = \int_K |h(\lambda)|^2\, dE_x(\lambda) \leq \|h\|^2 \underbrace{E_x(K)}_{\langle \underbrace{E(K)}_{1} x, x \rangle = \|x\|^2}$$

$$\Rightarrow \left\| \int h(\lambda)\, dE(\lambda) \right\| \leq \|h\|$$

$\Rightarrow \quad h \mapsto \int h(\lambda)\, dE(\lambda)$ stetig (mit Norm ≤ 1)

$\{\sum \alpha_i 1_{M_i}\} \to B(\mathcal{H})$

$\Rightarrow$ Diese Abb. ist (eindeutig!) stetig fortsetzbar zu beschränkten linearen Abb. auf $M_\infty(K)$

Eindeutigkeit klar, da $B \in B(\mathcal{H})$ eindeutig durch $\langle Bx, x\rangle \ \forall x \in \mathcal{H}$ bestimmt ist

$\square$

14.9 Spektralsatz für normale Operatoren: Ist $A \in B(\mathcal{H})$ normal, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\sigma(A)$, für welches $A = \int \lambda \, dE(\lambda)$ gilt.

Weiterhin gilt:

$$h(A) = \int h(\lambda) \, dE(\lambda) \qquad \forall \, h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)).$$

Beweis: Existenz: gezeigt in 14.6.

insbesondere in 14.6 (d) gezeigt:

$$\langle h(A) x, x \rangle = \int h(\lambda) \, dE_x(\lambda)$$

$$\overset{14.8}{\Rightarrow} \quad h(A) = \int h(\lambda) \, dE(\lambda)$$

Eindeutigkeit: Sei F Spektralmaß auf $\sigma(A)$ mit

$$A = \int \lambda \, dF(\lambda)$$

Sei p Polynom in $z, \bar{z}$

$$\overset{14.8}{\Rightarrow} \quad p(A) = \int p(\lambda) \, dF(\lambda)$$

Sei $f \in C(\sigma(A)) \Rightarrow \exists$ Polynome p_n mit $p_n \to f$
(in sup.-Norm)

$\Rightarrow p_n(A) \to f(A)$

$\int p_n(\lambda) \, dF(\lambda) \to \int f(\lambda) \, dF(\lambda)$ (nach 14.8., da $f \mapsto \int f(\lambda) \, dF(\lambda)$ stetig)

$$\Rightarrow f(A) = \int f(\lambda) \, dF(\lambda) \qquad \forall \, f \in C(\sigma(A))$$

Sei $\mathcal{M} := \{ f \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \mid f(A) = \int f(\lambda) \, dF(\lambda) \}$

$\Rightarrow$ (i) $C(\sigma(A)) \subset \mathcal{M}$

(ii) Seien $f_n \in \mathcal{M}$, $h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$ mit $f_n \to f$ beschr. pktw.

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow \left\langle \int f_n(\lambda)\,dF(\lambda)\,x,x \right\rangle \arrow[r, equal, "(14.8)"] \arrow[d, equal] & \int f_n(\lambda)\,dF_x(\lambda) \arrow[dd, "n\to\infty"] \\
\langle f_n(A)x,x\rangle \arrow[dd, "(14.3)"', "n\to\infty"] & \\
& \int h(\lambda)\,dF_x(\lambda) \arrow[d, equal, "(14.2)"] \\
\langle h(A)x,x\rangle & \left\langle \int h(\lambda)\,dF(\lambda)\,x,x \right\rangle
\end{tikzcd}$$

da F_x Maß, nach Satz von Lebesgue

$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$

$\Rightarrow \quad h(A) = \int h(\lambda)\,dF(\lambda) \qquad \forall h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$

also insbesondere

$$F(M) = \int 1_M(\lambda)\,dF(\lambda) = 1_M(A) = E(M)$$

$\Rightarrow \quad F = E \qquad$ eindeutig bestimmt $\qquad \square$

<u>14.10 Beispiel:</u> (vgl. 14.2)

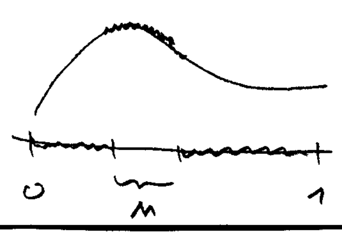
$\mathcal{H} = L^2(0,1)$

$(Af)(t) = t\,f(t)$

Def. $\quad E : \sigma[0,1] \to B(\mathcal{H})$ durch

$$E(M)f = 1_M \cdot f$$

d.h. $$(E(M)f)(t) = \begin{cases} f(t) & t \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ E Spektralmaß

Insbesondere

$$E_f(M) = \langle E(M) f, f \rangle = \int_0^1 1_M(t) f(t) \cdot \overline{f(t)}\, dt$$

$$= \int_M |f(t)|^2\, dt$$

$$\Rightarrow \quad dE_f(t) = |f(t)|^2\, dt$$

also:

$$\langle \int \lambda\, dE(\lambda) f, f \rangle = \int \lambda\, dE_f(\lambda)$$

$$= \int \lambda\, |f(\lambda)|^2\, d\lambda$$

$$= \int (Af)(\lambda)\, \overline{f(\lambda)}\, d\lambda$$

$$= \langle Af, f \rangle \qquad \forall f \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \quad A = \int \lambda\, dE(\lambda)$$

<u>14.11. Zusammenfassung</u>: Die Abbildung

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{M}_\infty(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$$
$$h \mapsto h(A)$$

hat folgende Eigenschaften:

(konstante Fkt =) $1 \mapsto 1$

identische Fkt $z(\lambda) = \lambda$ $\mapsto A$

$$(\alpha h + \beta g)(A) = \alpha h(A) + \beta g(A)$$

$$(h \cdot g)(A) = h(A) \cdot g(A)$$

$$\bar{h}(A) = h(A)^*$$

$$\| h(A) \| \leq \| h \|_{sup} = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} | h(\lambda) |$$

"=" falls $h = f \in C(\sigma(A))$

insbesondere: (glm konvergenz)

$$h_n \to h \quad \Rightarrow \quad h_n(A) \to h(A)$$

außerdem: (schwache konvergenz)

$h_n \to h$ beschr. pktweise $\Rightarrow \langle h_n(A) x, y \rangle \to \langle h(A) x, y \rangle$

$\forall x, y \in \mathcal{H}$

<u>14.12 Satz:</u> Sei $A \in B(\mathcal{H})$ normal und sei E das Spektralmaß von A. Dann gilt für $\lambda \in \sigma(A)$:

i) λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $E(\{\lambda\}) \neq 0$

ii) Ist λ Eigenwert von A, so ist $E(\{\lambda\})$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf den zugehörigen Eigenraum $\mathcal{H}_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$

iii) Ist λ isolierter Punkt von $\sigma(A)$, so ist λ Eigenwert von A.

Beweis: i), ii) Sei λ Eigenwert von A und $x \neq 0$ Eigenvektor

$Ax = \lambda x \Rightarrow A^* x = \bar{\lambda} x$ (da $\|(A-\lambda 1)x\|^2 = \|(A^* - \bar{\lambda} 1)x\|$ $\forall x \in \mathcal{H}$, da $A - \lambda 1$ normal)

Sei p Polynom in $z, \bar{z}$ $\Rightarrow p(A, A^*)x = p(\lambda, \bar{\lambda})x$

Sei $f \in C(\sigma(A)) \Rightarrow \exists$ Polynome p_n mit $p_n \to f$

$\Rightarrow p_n(A) \to f(A)$, also $p_n(A)x \to f(A)x$

$$\begin{array}{ccc} p_n(A)x & \to & f(A)x \\ \| & & \\ p_n(\lambda)x & \to & f(\lambda)x \end{array}$$

$\Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x \quad \forall f \in C(\sigma(A))$

$\Rightarrow \langle f(A)x, x\rangle = \langle f(\lambda)x, x\rangle$ — " —

Sei nun $h \in \mathcal{M}_\infty(\sigma(A))$ mit $\exists f_n \in C(\sigma(A))$ mit

$f_n \to h$ beschr. pktweise

$\Rightarrow \langle f_n(A)x, x\rangle \to \langle h(A)x, x\rangle$

und $f_n(\lambda) \to h(\lambda)$

$\Rightarrow \langle h(A)x, x\rangle = \langle h(\lambda)x, x\rangle$

Wähle nun $h = 1_{\{\lambda\}} \Rightarrow h(A) = 1_{\{\lambda\}}(A) = E(\{\lambda_0\})$

$h(\lambda) = 1_{\{\lambda\}}(\lambda) = 1$

also: $\langle E(\{\lambda\})x, x\rangle = \langle x, x\rangle$

Da $E(\{\lambda\})$ Projektor $\Rightarrow E(\{\lambda\})x = x \quad \forall x \in \mathcal{H}$ mit $Ax = \lambda x$

$\Rightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$ und $E(\{\lambda\})\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

Sei umgekehrt $E(\{\lambda\}) \neq 0$ und $E(\{\lambda\})x = x$

$$\Rightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle \underbrace{\underbrace{A}_{\tilde{\Phi}(z)} \; \underbrace{E(\{\lambda\})}_{\tilde{\Phi}(1_{\{\lambda\}})}}_{\tilde{\Phi}(\underbrace{z\cdot 1_{\{\lambda\}}}_{\lambda\cdot 1_{\{\lambda\}}})} x, y\rangle = \lambda \langle \underbrace{E(\{\lambda\})x}_{x}, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

$\forall y \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow Ax = \lambda x$

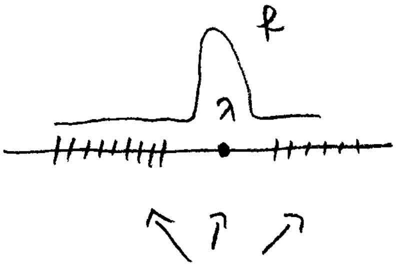
$\Rightarrow \lambda$ Eigenwert von A

iii) nach i) 2.2: λ isoliert in $\sigma(A) \Rightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$

Sei λ isoliert in $\sigma(A)$; Ann: $E(\{\lambda\}) = 0$

$\Rightarrow \exists f \in C(\sigma(A))$: $f(\lambda) = 1$

$f(t) = 0 \quad t \in \sigma(A) \setminus \lambda$



$\sigma(A)$

$$\Rightarrow f(A) = \int_{\sigma(A)} f(t)\, dE(t) = \underbrace{\int_{\sigma(A)\setminus\lambda} f(t)\, dE(t)}_{=0} + f(\lambda) \underbrace{E(\{\lambda\})}_{=0}$$

$= 0$

also $f(A) = 0$

aber: $\|f(A)\| = \|f\|_{C(\sigma(A))} = 1$ $\Big\}$ Wdsp $\Rightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$

$\square$

14.13. Satz: Ein normaler Operator $A \in B(\mathcal{H})$ ist genau dann kompakt, falls folgende beiden Bedingungen gelten:

a) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ besitzt keine Häufungspunkte.

b) Für $\lambda \neq 0$ gilt: $\dim \ker (T - \lambda I) < \infty$

Beweis: "$\Rightarrow$": Satz 10.5.

"$\Leftarrow$": a) $\Rightarrow$ $\sigma(A)$ abzählbar

Idee:
$A = \int \lambda \, dE(\lambda)$
$= \sum \lambda_i E(\{\lambda_i\})$

Sei $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\} = \sigma(A) \setminus \{0\}$ mit

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

Definiere f_n durch

$$f_n(\lambda) = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } \lambda = \lambda_i \quad i \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\lambda \in \sigma(A))$$

beachte: $f_n \in C(\sigma(A))$

$$|\lambda - f_n(\lambda)| \leq |\lambda_n| \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

d.h. $f_n \xrightarrow{n \to \infty} \underset{z}{\text{id.}}$ Fkt in $C(\sigma(A))$

Sei E Spektralmaß von A, d.h.

$$A = \int \lambda \, dE(\lambda)$$

Dann

$$f_n(A) = \int f_n(\lambda) \, dE(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\{\lambda_i\}) \quad \text{kompakt}$$

da $E(\{\lambda_i\})$ endlichen Rang besitzt (nach b)) weiterhin:

$$\|A - f_n(A)\| = \|z - f_n\|_{C(\sigma(A))}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(A) \text{ kompakt } \forall n \\ \\ f_n(A) \to A \quad \text{in } \|\cdot\| \end{array}\right\} \overset{9.2.}{\Longrightarrow} A \text{ kompakt}$$

$\square$