16. Unbeschränkte Operatoren

beschränkte Operatoren zu enger Rahmen für

- part. Dglen
- Quantenmechanik → von Neumannsche Theorie s.a. und symmetr. Operatoren

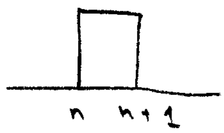
16.1. Beispiele: 1) Ortsoperator Q

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} \mid \int |f(t)|^2 dt < \infty \}$

$(Qf)(t) := t f(t)$

aber:

- Q nicht beschränkt: $f = 1_{[n,n+1]}$



$\Rightarrow \|f\|_2 = 1$, aber $\|Qf\|_2^2 = \int |t f(t)|^2 dt$

$$= \int_n^{n+1} t^2 dt \geq n^2$$

- Q nicht überall definiert: $\exists f \in \mathcal{H}$ mit $Qf \notin \mathcal{H}$

2) Impulsoperator P

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$(Pf)(t) = i f'(t)$

$\Rightarrow$ - P unbeschränkt
- P nicht überall definiert

3) beachte: Es gilt (formal)

$[Q,P] := QP - PQ = i \cdot I$

<u>16.2. Satz:</u> Sei A eine normierte Algebra mit Einselement e.

Dann gilt für alle $a, b \in A$

$$[a,b] = ab - ba \neq e.$$

<u>Beweis:</u> Sei $ab - ba = e$

Dann gilt auch : $a^n b - b a^n = n a^{n-1} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

denn: $n = 1$: $ab - ba = e \neq 0$

$n \to n+1$: $a^{n+1} b - b a^{n+1} = a^n \underbrace{(ab - ba)}_{e} + \underbrace{(a^n b - b a^n)}_{n a^{n-1}} a$

$$= a^n (n+1)$$

$$\Rightarrow \quad n \| a^{n-1} \| = \| n a^{n-1} \| = \| a^n b - b a^n \|$$

$$\leq 2 \| a^n b \|$$

$$\leq 2 \| a^{n-1} \| \, \|a\| \, \|b\|$$

$$\overset{\|a^{n-1}\| \neq 0}{\Rightarrow} \quad n \leq 2 \|a\| \, \|b\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wdsp

□

<u>16.3 Def.</u>: 1) Ein <u>Operator</u> T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine auf einem linearen Teilraum $D(T) \subset \mathcal{H}$ definierte lineare Abbildung T mit Werten in $\mathcal{H}$.

$D(T)$ Definitionsbereich von T

$R(T) = \{Tx \mid x \in D(T)\}$ Wertebereich von T

2) Ist $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$, so heißt T <u>dicht definiert</u>.

3) $\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) \mid x \in D(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

heißt <u>graph</u> von T.

4) gilt $\mathcal{G}(T_1) \subset \mathcal{G}(T_2)$, d.h.

$D(T_1) \subset D(T_2)$ und $T_1 x = T_2 x \quad \forall x \in D(T_1)$,

so heißt T_2 <u>Erweiterung</u> von T_1.

Notation: $T_1 \subset T_2$

5) T heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $\mathcal{G}(T)$ abgeschlossen in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist

<u>16.4 Bem</u>: 1) $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist Hilbertraum bzgl. des Skalarprodukts

$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle$,

$(x_n, y_n) \to (x, y)$ bedeutet also nichts anderes als

$x_n \to x$ und $y_n \to y$

2) T abgeschlossen bedeutet also:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x \\ Tx_n \to y \\ (x \in D(T)) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x \in D(T) \text{ und } Tx = y$$

(beachte: da T nicht stetig folgt aus Konvergenz der (x_n) i.a. nicht die Konvergenz der (Tx_n))

3) T heißt <u>abschließbar</u>, falls

$$\left.\begin{array}{l} x_n \searrow \\ z_n \nearrow \end{array} x \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} Tx_n \to y \\ Tz_n \to \tilde{y} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \tilde{y}$$

$(x_n, z_n \in D(T))$

Dann def. wir Erweiterung $\bar{T} \supset T$ durch $\bar{T}x = y$

$\Rightarrow$ $\bar{T}$ abgeschlossen, $\mathcal{G}(\bar{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$

beachte: nicht jeder Operator ist abschließbar !

<u>16.5. Satz</u>: Sei T ein dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$.

Dann gilt:

1) $D(T^*) := \{ y \in \mathcal{H} \mid x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ ist stetig auf $D(T) \}$ ist linearer Teilraum von $\mathcal{H}$.

2) Für jedes $y \in D(T^*)$ gibt es genau ein $T^* y \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x \in D(T)$$

3) $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$ ist linear

Beweis: 1) ✓

2) Eindeutigkeit: $\langle x, T_1^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T_2^* y\rangle \quad \forall x \in D(T)$

$\Rightarrow \langle x, T_1^* y - T_2^* y\rangle = 0$ — $\|$ —

Da $D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ $\Rightarrow T_1^* y = T_2^* y$

Existenz: Sei $L : D(T) \to \mathbb{C}$

$x \mapsto L(x) = \langle Tx, y\rangle$

L stetig, d.h. beschränkt auf $D(T)$, d.h. $|L(x)| \leq c\|x\|$

$\Rightarrow \exists$ Ausdehnung $\tilde{L} \in \mathcal{H}^*$

Satz von Riesz $\Rightarrow \exists z \in \mathcal{H} : \tilde{L}(x) = \langle x, z\rangle$

$\Rightarrow \langle Tx, y\rangle = L(x) = \tilde{L}(x) = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in D(T)$

Setze $T^* y = z$

3) klar wegen Eindeutigkeit in 2)

□

16.6. Def. T^* heißt der zu T adjungierte Operator.

16.7. Notation: V bezeichne den Operator

$V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$(x, y) \mapsto (-y, x)$

beachte: V ist unitär auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

also $D(T^*)$ bestimmt gem.:

$y \in D(T^*) \Leftrightarrow \exists z \in \mathcal{H}$

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$

$\forall x \in D(T)$

dann $z = T^* y$

<u>16.8 Lemma:</u> Sei T dicht definiert auf $\mathcal{H}$, dann gilt:

$$\mathcal{G}(T^*) = [V\mathcal{G}(T)]^\perp$$

<u>Beweis:</u> $(x,y) \in [V\mathcal{G}(T)]^\perp$

$$\Leftrightarrow \langle \underbrace{V(\tilde{x},\tilde{y})}_{(-\tilde{y},\tilde{x})}, (x,y)\rangle = 0 \qquad \forall \underbrace{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathcal{G}(T)}_{\substack{\tilde{x}\in D(T)\\ \tilde{y} = T\tilde{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \langle (-T\tilde{x},\tilde{x}), (x,y)\rangle = 0 \qquad \forall \tilde{x} \in D(T)$$

$$\Leftrightarrow -\langle T\tilde{x}, x\rangle + \langle \tilde{x}, y\rangle = 0 \qquad -\shortparallel-$$

$$\Leftrightarrow \langle T\tilde{x}, x\rangle = \langle \tilde{x}, y\rangle \qquad -\shortparallel-$$

$$\Leftrightarrow x \in D(T^*) \text{ und } y = T^* x$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{G}(T^*)$$

$\square$

<u>16.9. Korollar:</u> Sei T dicht definiert und abgeschlossen.

Dann gilt:

$$\mathcal{H}\times\mathcal{H} \cdot V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*)$$

<u>Beweis:</u> Es gilt allgemein: $\mathcal{K}$ Hilbertraum,

$M \subset \mathcal{K}$ abg. linearer Teilraum

$\Rightarrow \mathcal{K} = M \oplus M^\perp$

hier: $\mathcal{G}(T)$ abg., da T abg. Operator

$\Rightarrow V\mathcal{G}(T)$ abgeschl., da V unitär

$\Rightarrow \mathcal{H}\times\mathcal{H} = V\mathcal{G}(T) \oplus [V\mathcal{G}(T)]^\perp = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*)$ $\square$

16.10. Satz: 1) Sei T dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$.

Dann ist T^* ein abgeschlossener Operator.

2) Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator auf $\mathcal{H}$.

Dann ist $D(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt: $T^{**} = T$.

Beweis: 1) $M^\perp$ abgeschlossen $\forall\, M \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$\Rightarrow \mathcal{G}(T^*) = [V\mathcal{G}(T)]^\perp$ abgeschlossen

d.h. T^* abgeschlossen.

~~16.10. Satz: Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $D(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt: $T^{**} = T$.~~

2) $$\mathcal{H} \times \mathcal{H} = V\mathcal{G}(T) \oplus \mathcal{G}(T^*)$$

$$\overset{V \text{ unit.}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{H} \times \mathcal{H} = \underbrace{V^2\mathcal{G}(T)}_{\mathcal{G}(T)} \oplus V\mathcal{G}(T^*) \qquad \text{da } V^2 = -I$$

Sei nun $z \perp D(T^*)$, z.z: $z = 0$

$$\forall y \in D(T^*) : \langle z, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (0,z), \underbrace{(-T^*y, y)}_{V(y, T^*y)} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow (0,z) \in [V\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \mathcal{G}(T)$$

$$\Rightarrow z = T(0) = 0$$

$\Rightarrow D(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$

$\Rightarrow T^{**}$ definiert

16.9 $\Rightarrow$ $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = V\mathcal{G}(T^*) \oplus \mathcal{G}(T^{**})$

d.h. $\mathcal{G}(T^{**}) = [V\mathcal{G}(T^*)]^\perp = \mathcal{G}(T)$ (siehe oben)

$\Rightarrow T^{**} = T$ $\square$

16.11. Def.: 1) Ein $\overbrace{\text{Operator}}^{\text{dicht definierter}}$ T auf $\mathcal{H}$ heißt <u>symmetrisch</u>, falls gilt:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall x,y \in D(T),$$

d.h. $T \subset T^*$

2) Gilt $T = T^*$, so heißt T <u>selbstadjungiert</u>

3) Ein symmetrischer Operator T heißt <u>maximal symmetrisch</u>, falls er keine echte symmetrische Erweiterung besitzt, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} T \subset S \\ S \text{ symmetr.} \end{array}\right\} \Rightarrow S = T$$

16.12. Bem: 1) Selbstadjungierte Operatoren sind abgeschlossen, da T^* immer abgeschlossen

Symmetrische Operatoren sind i.a. nicht abgeschlossen, aber immer abschließbar: $\overline{T} = T^{**}$

2) Selbstadjungierte Operatoren sind maximal symmetrisch:

Sei $T = T^*$ und $T \subset S$, $S \subset S^*$

$\Rightarrow S^* \subset T^* = T \subset S \subset S^*$

$\Rightarrow$ alles "="

$\Rightarrow T = S$

3) Es gibt maximal symmetrische Operatoren, die nicht selbstadjungiert sind.

16.13. Satz: Sei T ein symmetrischer (~~nicht notwendigerweise dicht definierter~~) Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \qquad \forall\, x \in D(T)$

b) T abgeschlossen $\iff$ $\operatorname{ran}(T + iI)$ abgeschlossen

c) $T + iI$ ist injektiv

d) $\operatorname{ran}(T + iI) = \mathcal{H} \implies T$ maximal symmetrisch

e) (a) – (d) gelten auch mit der Ersetzung $i \to -i$

Beweis: a) $\|Tx + ix\|^2 = \langle Tx + ix, Tx + ix \rangle$

$$= \underbrace{\langle Tx, Tx \rangle}_{\|Tx\|^2} + \underbrace{\underbrace{\langle Tx, ix \rangle}_{-i\langle Tx, T\rangle} + \underbrace{\langle ix, Tx \rangle}_{i\langle x, Tx\rangle}}_{=0} + \underbrace{\langle ix, ix \rangle}_{+\langle x, x\rangle = \|x\|^2}$$

$$= \|Tx\|^2 + \|x\|^2$$

b) a) $\implies$ $\mathcal{G}(T) \longleftrightarrow \operatorname{ran}(T + iI)$ isometrisch

denn: $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$: $\|(x,y)\|^2 = \langle (x,y), (x,y) \rangle$

$$= \|x\|^2 + \|\underbrace{y}_{=Tx}\|^2$$

$$= \|(T + iI)x\|^2$$

c) $(T + iI)x = 0 \overset{a)}{\implies} \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = 0$, d.h. $x = 0$

d) Sei $\operatorname{ran}(T + iI) = \mathcal{H}$ und $T \subsetneqq T_1$ (d.h. $D(T) \subsetneqq D(T_1)$)

$\implies T + iI \subsetneqq T_1 + iI \implies T_1 + iI$ kann nicht injektiv sein

$\overset{c)}{\implies} T_1$ nicht symmetrisch / e) klar $\square$

<u>16.14 Lemma:</u> Sei T dicht definierter Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$$

<u>Beweis:</u> Sei $x \in \ker T^*$, d.h. $T^* x = 0$

$\Rightarrow \langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}(T)$

$\Rightarrow x \in (\operatorname{ran} T)^\perp$

Sei $x \in (\operatorname{ran} T)^\perp$, d.h. $\langle Ty, x \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}(T)$

$\Rightarrow x \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^* x = 0$

$\square$

<u>16.15 Satz:</u> Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator.
Dann sind äquivalent:

i) T ist selbstadjungiert

ii) $+i$ und $-i$ sind keine Eigenwerte von T^*, d.h.

$$\ker(T^* - i) = \{0\} = \ker(T^* + i)$$

iii) $\operatorname{ran}(T + i) = \mathcal{H} = \operatorname{ran}(T - i)$

<u>Beweis:</u> i) $\Rightarrow$ ii) Sei $T = T^*$ und $(T^* - \lambda)x = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$

$\Rightarrow Tx = T^* x = \lambda x$

$\Rightarrow \lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$

$\lambda \neq \bar{\lambda} \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) $\Leftrightarrow$ iii) $(T - i)^* = T^* + i$

$\overset{16.14}{\Longrightarrow} \ker(T^* + i) = [\operatorname{ran}(T - i)]^\perp \Longleftrightarrow [\ker(T^* + i)]^\perp = \operatorname{ran}(T - i)$

da $\operatorname{ran}(T - i)$ abg. nach 16.13

Somit $\ker(T^* + i) = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{ran}(T - i) = \mathcal{H}$ für $T^* - i$ analog

iii) $\Rightarrow$ i) Sei $x \in D(T^*)$, z.z.: $x \in D(T)$

$\operatorname{ran}(T-i) = \mathcal{H} \Rightarrow \exists\, y \in D(T) = D(T-i)$:

$$\underbrace{(T-i)y}_{} = (T^*-i)\,x$$

$$= (T^*-i)y \quad \text{da } y \in D(T) \subset D(T^*)$$

$\Rightarrow (T^*-i)(x-y) = 0$

aber $\ker(T^*-i) = [\operatorname{ran}(T+i)]^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow x - y = 0$

d.h. $x = y \in D(T)$

$\square$

16.15 Bem.: beachte: spezielle Wahl von $\pm i$ nicht wesentlich, Satz gilt genauso bei Ersetzung

$+i \to z_+ \in \mathbb{C}_+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$

$-i \to z_- \in \mathbb{C}_- = \{z \mid \operatorname{Im} z < 0\}$

16.16 Def.: Sei T ein Operator auf $\mathcal{H}$. Die Menge

$S(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid T - zI : D(T) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv}\}$

heißt Resolventenmenge von T, und

$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus S(T)$ Spektrum von T.

16.17. Satz: Sei T ein abgeschlossener Operator auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) $(T - zI)^{-1} \in B(\mathcal{H})$ für jedes $z \in S(T)$

b) $\sigma(T)$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$

16.18. Bem: $\sigma(T)$ ist i.a. nicht mehr kompakt,

z.B. $T = Q$ Multiplikationsoperator auf $L^2(\mathbb{R})$

$$D(Q) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |t f(t)|^2 dt < \infty \}$$

$\Rightarrow$ Q abgeschlossen und s.a.

und $\sigma(Q) = \mathbb{R}$

Beweis von 16.17: a) allgemein gilt:

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ injektiv} \\ T \text{ abgeschl.} \end{array}\right\} \Rightarrow T^{-1} \text{ abgeschl.}$$

(da $\mathcal{G}(T^{-1}) = \{(Tx, x) \mid x \in D(T)\}$)

also: $(T - zI)^{-1}$ abgeschl. und $D((T-zI)^{-1}) = \mathcal{H}$

$$\xRightarrow[\text{abg. Graphen (Übung 20)}]{\text{Satz vom}} (T - zI)^{-1} \text{ stetig, d.h. } \in B(\mathcal{H})$$

b) z.z.: $\rho(T)$ offen

Sei $z_0 \in \rho(T) \overset{a)}{\Rightarrow} (T - z_0 I)^{-1} \in B(\mathcal{H})$

Setze $\varepsilon := \|(T - z_0 I)^{-1}\|$ und sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow T - zI = (T - z_0 I) + (z - z_0) I$$

$$= \underbrace{[I + \underbrace{(z - z_0)(T - z_0 I)^{-1}}_{\|\cdot\| < 1}]}_{\text{invertierbar}} (T - z_0 I)$$

$$\Rightarrow (T - zI)^{-1} = (T - z_0 I)^{-1} [\ldots]^{-1}$$

□

16.19. Lemma: Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $T - zI$ ist injektiv

b) $\operatorname{ran}(T - zI)$ ist abgeschlossen

(vgl. 16.13 für $z = \pm i$)

Beweis: Sei $z = \xi + i\eta$ $(\xi, \eta \in \mathbb{R}, \eta \neq 0)$, $x \in D(T)$

$$\Rightarrow \|(T - zI)x\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle + |z|^2\langle x, x\rangle \underbrace{- z\langle x, Tx\rangle - \bar{z}\langle Tx, x\rangle}_{-2\,\mathrm{Re}\,z \cdot \langle x, Tx\rangle}$$

$$\langle Tx, Tx\rangle + \eta^2\langle x, x\rangle + \xi^2\langle x, x\rangle$$

$$- 2\xi\langle x, Tx\rangle$$

$$= \|(T - \xi)x\|^2 + \eta\|x\|^2$$

$$\geq \eta\|x\|^2$$

$\Rightarrow$ - $T - zI$ injektiv

- $\operatorname{ran}(T - zI)$ abgeschlossen

$(((T - zI)x_n)$ CF $\Rightarrow$ (x_n) CF $)$

$\square$

16.20 Satz: Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann sind äquivalent:

i) T ist selbstadjungiert

ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Sei $T = T^*$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\overset{16.9.}{\Longrightarrow}$ $T - zI$ injektiv

ran $(T - zI)$ abgeschl. , z.z.: ran $(T - zI) = \mathcal{H}$

$$\operatorname{ran}(T - zI)^{\perp} = \ker(T^* - \bar{z} I) \qquad (16.14)$$

$$= \ker(T - \bar{z} I) \qquad \text{da } T = T^*$$

$$= \{0\} \qquad \text{da EW von symm. Operatoren reell}$$

$\Rightarrow$ ran $(T - zI) = \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ $T - zI$ bijektiv

$\Rightarrow$ $z \notin \sigma(T)$

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\pm i \notin \sigma(T)$, d.h.

ran $(T \pm iI) = \mathcal{H}$

$\overset{16.15}{\Longrightarrow}$ $T = T^*$

$\square$

16.21. Bemerkung: Der Beweis von 16.20 zeigt, daß abg. symmetr., nicht selbstadjungierte T mindestens $+i$ oder $-i$ in ihrem Spektrum haben. Man kann leicht zeigen:

$$\dim \underbrace{\ker (T^* - zI)}_{\operatorname{ran}(T - zI)^\perp} \quad \text{ist jeweils konstant auf } \mathbb{C}_+ \text{ und } \mathbb{C}_-$$

$$\text{somit: } \left.\begin{array}{l} +i \in \sigma(T) \Rightarrow \mathbb{C}_+ \subset \sigma(T) \\ -i \in \sigma(T) \Rightarrow \mathbb{C}_- \subset \sigma(T) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} \subset \sigma(T)$$

Somit gibt es für abgeschlossene symmetrische T nur die 4 Möglichkeiten:

i) $\sigma(T) = \mathbb{C}$

ii) $\sigma(T) = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$

iii) $\sigma(T) = \mathbb{C}_- \cup \mathbb{R}$

iv) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

Fall (iv) entspricht selbstadjungierten Operatoren.

16.22. Bem.: Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator.

Wir wissen

$$T = T^* \overset{?}{\Longleftrightarrow} \text{Verhalten von } T \pm iI$$

Es gilt in jedem Fall:

- $T \pm iI$ injektiv (16.13)
- $\operatorname{ran}(T \pm iI)$ abgeschlossen (16.13)

Frage: $\operatorname{ran}(T \pm iI) = \mathcal{H}$?

16.23. Def.: Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Die beiden Zahlen

$$n_+(T) := \dim [\operatorname{ran}(T + iI)]^\perp \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

$$n_-(T) := \dim [\operatorname{ran}(T - iI)]^\perp \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

heißen Defektindizes von T.

16.24. Korollar: Ein abg. symm. Operator T ist genau dann selbstadjungiert, falls gilt:

$$n_+(T) = n_-(T) = 0$$

Beweis: ist nur Umformulierung von 16.15.

$\square$

16.25. Bem.: Wir stellen uns nun die Frage:

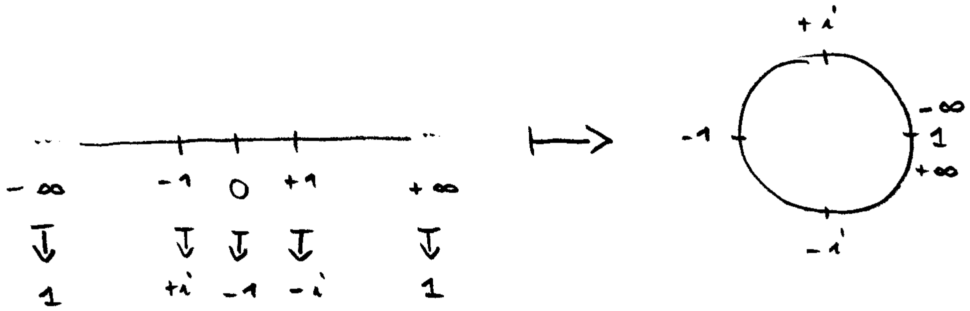
T abg., symmetr. $\rightsquigarrow$ Gibt es selbstadj. Erweiterung S, d.h.

$$T \subset S \quad \text{mit} \quad S^* = S$$

$$(\Rightarrow T \subset S = S^* \subset T^*)$$

<u>Idee</u>: bilde Problem von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ab

vermöge
$$t \mapsto \frac{t-i}{t+i}$$



betrachte entsprechende Abb. für Operatoren

$$T \mapsto U := (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

selbstadj. $\rightsquigarrow$ unitär

symmetr. $\rightsquigarrow$ isometrisch

<u>16.26 Def.</u>: Sei T ein abg., symmetr. Operator auf $\mathcal{H}$. Dann ist $T + iI : \mathcal{H} \to \operatorname{ran}(T+iI)$ injektiv, $(T+iI)^{-1}$ auf $D(U) := \operatorname{ran}(T+iI)$ also definiert. Der Operator $U := (T-iI)(T+iI)^{-1}$ mit

$$U : \operatorname{ran}(T+iI) \xrightarrow{(T+iI)^{-1}} \mathcal{H} \xrightarrow{T-iI} \operatorname{ran}(T-iI)$$

heißt <u>Cayley-Transformierte</u> von T.

<u>16.27 Lemma</u>: $U : \operatorname{ran}(T+iI) \to \operatorname{ran}(T-iI)$ ist eine Isometrie.

<u>Beweis</u>: Sei $y \in \operatorname{ran}(T+iI)$, d.h. $y = Tx + ix$ mit $x \in D(T)$

$$\Rightarrow Uy = (T-iI)(T+iI)^{-1} y = Tx - ix$$

$$\overset{16.13}{\Rightarrow} \|Uy\|^2 = \|Tx - ix\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 = \|Tx + ix\|^2 = \|y\|^2$$

□

16.28 Satz: 1) Sei $\mathcal{U}$ die Cayley-Transformierte eines abg., symm. Operators T auf $\mathcal{H}$. Dann gilt

i) $\mathcal{U}$ ist abgeschlossen

ii) $\operatorname{ran}(I-\mathcal{U}) = D(T)$, $I-\mathcal{U} : D(\mathcal{U}) \to D(T)$ ist injektiv und es gilt

$$T = i\,(I+\mathcal{U})(I-\mathcal{U})^{-1}$$

iii) $\mathcal{U}$ unitär $\Leftrightarrow$ T selbstadjungiert.

2) Sei V ein abg. Operator auf $\mathcal{H}$ mit

- V isometrisch
- $I-V$ injektiv

Dann ist V die Cayley-Transformierte eines abg., symmetrischen Operators S auf $\mathcal{H}$.

Beweis: 1) i) $\operatorname{ran} \mathcal{U} = \operatorname{ran}(T - iI)$ abgeschl., da T abg. (16.13)

ii) Sei $z \in D(\mathcal{U}) = \operatorname{ran}(T+iI)$, d.h. $z = Tx + ix$ für $x \in D(T)$

$$Tx + ix \overset{\mathcal{U}}{\longmapsto} Tx - ix$$

$$Tx + ix \overset{I}{\longmapsto} Tx + ix$$

$$\Rightarrow \quad Tx + ix \overset{I-\mathcal{U}}{\longmapsto} 2ix$$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{D(\mathcal{U})}}{\operatorname{ran}(T+iI)} \longrightarrow D(T)$$

also $\operatorname{ran}(I-\mathcal{U}) = D(T)$ und $I-\mathcal{U}$ injektiv

$(x = 0 \Rightarrow Tx + ix = 0)$

analog: $Tx + ix \overset{I+\mathcal{U}}{\longmapsto} 2Tx$

$$\Rightarrow \quad 2ix \overset{(I-\mathcal{U})^{-1}}{\longmapsto} Tx + ix \overset{I+\mathcal{U}}{\longmapsto} 2Tx \overset{i}{\longmapsto} 2iTx \quad \Rightarrow T = i(I+\mathcal{U})(I-\mathcal{U})^{-1}$$

iii) Sei T selbstadjungiert

$\Rightarrow$ $D(U) = \operatorname{ran}(T + iI) = \mathcal{H}$

$\operatorname{ran}(U) = \operatorname{ran}(T - iI) = \mathcal{H}$ (nach 16.15)

$\Rightarrow$ $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, isometrisch und surjektiv, d.h. U unitär.

Sei U unitär, d.h.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{H} &= D(U) = \operatorname{ran}(T + iI) \\ \mathcal{H} &= \operatorname{ran}(U) = \operatorname{ran}(T - iI) \end{aligned}\right\} \overset{16.15}{\Longrightarrow} T \text{ selbstadj.}$$

2) Sei V abg., isometrisch mit $I - V$ injektiv

Definiere S auf

$D(S) := \operatorname{ran}(I - V)$

durch

$$S := i(I+V)(I-V)^{-1}$$

$$S : \operatorname{ran}(I-V) \xrightarrow{(I-V)^{-1}} D(V) \xrightarrow{I+V} \operatorname{ran}(I+V) \xrightarrow{i} \operatorname{ran}(I+V)$$

$$\begin{aligned} x = u - Vu &\longmapsto u \longmapsto (u + Vu) \longmapsto i(u + Vu) \\ y = v - Vv &\longmapsto \quad \ldots \quad \longmapsto i(v - Vv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle Sx, y \rangle &= \langle i(u+Vu), v - Vv \rangle \\ &= \underline{i\langle u, v \rangle} - i\langle u, Vv \rangle + i\langle Vu, v \rangle \underline{- i\langle Vu, Vv \rangle} \\ &= -i\langle u, Vv \rangle + i\langle Vu, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, Sy \rangle &= \langle u - Vu, i(v + Vv) \rangle \\ &= \underline{-i\langle u, v \rangle} - i\langle u, Vv \rangle + i\langle Vu, v \rangle + \underline{i\langle Vu, Vv \rangle} \\ &= -i\langle u, Vv \rangle + i\langle Vu, v \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle \quad \forall x, y \in D(S) \quad \Rightarrow S$ symmetrisch weiterhin:

$$x = u - Vu \overset{S}{\longmapsto} i(u+Vu)$$

$$\overset{iI}{\longmapsto} iu - iVu$$

$$\Rightarrow x = u - Vu \overset{S+iI}{\longmapsto} 2iu \quad , \quad u \in D(V)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{ran}(S+iI) = D(V)$$

$\overset{16.13}{\Longrightarrow}$ S abgeschlossen, da $D(V)$ abgeschlossen

(V abgeschl. $\Rightarrow$ $g(V)$ abgeschl.

$$g(V) = \{(u, Vu) \mid u \in D(V)\}$$

$$\|(u,Vu)\|^2 = \|u\|^2 + \|Vu\|^2 = 2\|u\|^2$$

$$\Rightarrow g(V) \leftrightarrow D(V)$$

abg $\leftrightarrow$ abg)

betrachte nun die Cayley-Transformierte U von S

$$D(U) = \operatorname{ran}(S+iI) = D(V)$$

und

$$U := (S-iI)(S+iI)^{-1}$$

Sei $u \in D(U) = \operatorname{ran}(S+iI)$,

$$u \overset{(S+iI)^{-1}}{\longmapsto} \frac{1}{2i}(u - Vu) \overset{S-iI}{\longmapsto} \frac{1}{2i}\{i(u+Vu) - i(u-Vu)\} = Vu$$

$$\Rightarrow Uu = Vu$$

also $U = V$

$\square$

16.29 Lemma: Sei T ein (dicht definierter!) abgeschlossener, symmetrischer Operator und $\mathcal{U}$ seine Cayley-Transformierte.

1) Sei $T \subset S$ und S abg., symmetrisch und V die Cayley-Transformierte von S. Dann gilt: $\mathcal{U} \subset V$

2) Sei $\mathcal{U} \subset V$ mit V $\overset{\text{abg}}{\text{isometrisch}}$. Dann ist V Cayley-Transformierte eines abg., symmetrischen Operators S mit $T \subset S$.

Beweis: 1) klar nach Def. von $\mathcal{U}$ und V

2) Sei V abg., isometrisch, bleibt z.z.: $I-V$ injektiv

$\operatorname{ran}(I-V) \supset \operatorname{ran}(I-\mathcal{U}) = D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$

also $\operatorname{ran}(I-V)$ dicht in $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ $I-V$ injektiv

denn: $\operatorname{ran}(I-V)^{\perp} \overset{16.14}{=} \ker(I-V^*) = \{0\}$

Sei nun $(I-V)x = 0 \Rightarrow x = Vx$

$\Rightarrow V^*x = V^*Vx = x$ (V isometr. $\Leftrightarrow V^*V = I$)

$\overset{\text{oben}}{\Longrightarrow} x = 0$

$\Rightarrow I-V$ injektiv

$\overset{16.28}{\Longrightarrow}$ V ist Cayley-Transformierte eines abg., symm. Operators S

$T \subset S$ klar da $T = i(I+\mathcal{U})(I-\mathcal{U})^{-1}$

$S = i(I+V)(I-V)^{-1}$

16.30 Satz: Sei T ein abgeschl., symmetrischer Operator und

$n_+ = \dim[\operatorname{ran}(T+iI)]^\perp$, $n_- = \dim[\operatorname{ran}(T-iI)]^\perp$

seine Defektindizes. Dann gilt:

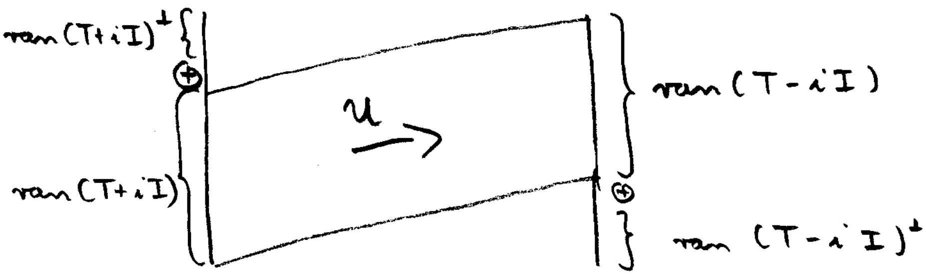
(1) T selbstadjungiert $\iff$ $n_+ = 0 = n_-$

(2) T maximal symmetrisch $\iff$ $n_+ = 0$ oder $n_- = 0$

(3) T besitzt eine selbstadj. Erweiterung $\iff$ $n_+ = n_-$

Beweis: (1) Korollar 16.24

(2),(3) Sei U Cayley-Transformierte von T



Erweiterung S von T hat nach 16.29 C.-T. V, die auf $\operatorname{ran}(T+iI)$ wie U wirkt und zusätzlich einen Teil von $\operatorname{ran}(T+iI)^\perp$ isometrisch auf Teil von $\operatorname{ran}(T-iI)^\perp$ abbildet (ansonsten dort aber beliebig ist)

also: Ist $\operatorname{ran}(T+iI)^\perp = \{0\}$ oder $\operatorname{ran}(T-iI)^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow$ keine solche Erweiterung möglich $\Rightarrow$ (2)

Selbstadj. Erweiterung genau dann möglich, wenn

$\dim \operatorname{ran}(T+iI)^\perp = \dim \operatorname{ran}(T-iI)^\perp$

16.31. Bem: Sei $n_+ = n_-$. Eine selbstadj. Erweiterung von T ist dann also nicht eindeutig bestimmt, sondern alle Erweiterungen entsprechen eindeutig allen möglichen Isometrien: $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, wobei $\dim \mathcal{K} = n_+$

16.32. Beispiele: 1) $\mathcal{H} = L^2(0,1)$

$D(T) = \{ f \in \mathcal{H} \mid f \text{ absolut stetig}, f(0) = f(1) = 0 \}$

$(Tf)(t) = i f'(t)$

$\Rightarrow$ T symmetrisch, aber nicht s.a. da

$D(T^*) = \{ f \in \mathcal{H} \mid f \text{ absolut stetig} \}$, $(T^* f)(t) = i f'(t)$

$$\Rightarrow \operatorname{ran}(T \pm iI)^\perp = \ker(T^* \mp iI)$$
$$= \{ \alpha e^{\pm t} \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$$

$\Rightarrow n_+ = n_- = 1$

also: s.a. Erweiterungen von T $\leftrightarrow$ unitären Abb. $U: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$ $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$

$U(z) = \alpha z$

$D(T_\alpha) = \{ f \in \mathcal{H} \mid f \text{ absolut stetig}, f(0) = \alpha f(1) \}$

$(T_\alpha f)(t) = i f'(t)$