Beispiele: 1 "Ortsoperator"

$\mathcal{H} = L^2[0,1]$

$(Tf)(t) = t\,f(t)$

$D(T) = \{ f \in L^2([0,1]) \mid t \cdot f(t) \in L^2[0,1] \}$

$T^* = ?$

$D(T^*) = \{ g \in \mathcal{H} \mid \exists\, h \in \mathcal{H} : \langle Tf, g \rangle = \langle f, g \rangle$
$\forall f \in D(T) \}$

d.h

$$\int_0^1 t\,f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \langle Tf, g \rangle = \langle f, g \rangle$$
$$= \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,[\,t\,g(t) - h(t)\,]\,dt = 0 \quad \forall f \in D(T)$$

$\Rightarrow t\,g(t) - h(t) = 0$

$\Rightarrow \underset{\displaystyle (T^*g)(t)}{\underset{\shortparallel}{h(t)}} = t\,g(t) \in \mathcal{H} \Rightarrow g \in D(T)$

$\Rightarrow T = T^*$

(2) "Impulsoperator"

beachte: absolut stetige Fkten
$\hat{=}$ Fkten, deren Ableitung f.ü. existiert
und so dass HS der Diff+Integralrechn.
gilt

$\mathcal{H} = L^2[0,1]$

$T = i \frac{d}{dt}$

beachte: formal gilt

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 i f'(t) \overline{g(t)} \, dt$$

$$= i \int_0^1 f' \bar{g}$$

$$= \underbrace{-i \int_0^1 f \bar{g}'}_{\int_0^1 f \, \overline{i g'}} + i \underbrace{\left(f(1)\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0) \right)}_{(*)}$$

$$= \langle f, Tg \rangle$$

also: damit $\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$

brauchen wir $(*) = 0$

kanonische Wahl

$$D(T) = \{ f \in L^2 \mid f \text{ absolut stetig}, \; f' \in L^2, \; f(0) = 0 = f(1) \}$$

aber dann gilt

$$D(T^*) = \{ f \in L^2 \mid f \text{ absolut stetig}, \; f' \in L^2 \}$$

$$T^* g = i g'$$

$$\Rightarrow T \subsetneq T^*$$

beachte: T^* nicht symmetrisch

T symmetrisch, aber nicht selbstadj.

Es gilt: für jedes $|\alpha| = 1$ $\exists$ s.a. Erweiterung T_α von T

mit $T_\alpha f = i f'$

und

$$D(T_\alpha) = \{ f \in L^2 \mid f \text{ absolut stetig}, \; f' \in L^2, \; f(1) = \alpha f(0) \}$$

hier gilt: $\mathcal{D}(T_\alpha^*) = \mathcal{D}(T_\alpha)$

d.h. $T_\alpha^* = T_\alpha$

denn für $f \in \mathcal{D}(T_\alpha)$, $g \in \mathcal{D}(T_\alpha^*)$

muß gelten

$$\underbrace{f(1)}_{\alpha f(0)}\bar{g}(1) - f(0)\bar{g}(0) = 0 \xRightarrow[\substack{\text{wähle} \\ f \text{ mit } f(0) \neq 0}]{} \alpha \bar{g}(1) = \bar{g}(0)$$

$\Rightarrow g(1) = \alpha g(0)$

beachte: $\pm i$ sind Eigenwerte von T^*,

da $T^* e^{\pm t} = \pm i e^{\pm t}$

und $e^{\pm t} \in \mathcal{D}(T^*)$

also

$\sigma(T) = \sigma(T^*) = \mathbb{C}$

aber (für alle α)

$$\sigma(T_\alpha) \subset \mathbb{R}$$
$$\shortparallel$$
$$\{\Theta + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{wobei } \alpha = e^{-i\Theta}$$