2. Geometrie von Hilberträumen

2.0 Erinnerung: Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein (komplexer) Vektorraum, versehen mit Skalarprodukt

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

der bzgl. der induzierten Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in \mathcal{H})$$

vollständig ist.

Wesentliche Beispiele:

- $\mathbb{C}^n$ mit $\langle (x_i)_{i=1}^n , (y_i)_{i=1}^n \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$

  (endlich-dimensional)

- $L^2(\mu)$ mit

  $$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, d\mu$$

  (im Allgemeinen unendlich-dimensional)

Es gilt:

- Cauchy-Schwarz:

  $$|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

  "=" falls x, y linear abhängig

- Die Abbildungen

  $x \mapsto \langle x, y \rangle$, $x \mapsto \langle y, x \rangle$ (für festes $y \in \mathcal{H}$)

  und $x \mapsto \|x\|$ sind stetig

- Polarisationsgleichungen

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\}$$

- Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- Satz von Pythagoras

Sei $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ mit $\langle x_i, x_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j$, dann gilt:

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$$

<u>2.1 Definition:</u> Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

1) $x, y \in \mathcal{H}$ heißen <u>orthogonal</u> $(x \perp y)$, falls $\langle x,y\rangle = 0$

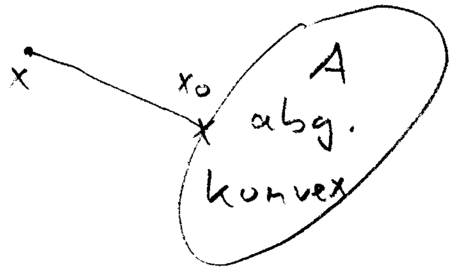
2) Teilmengen $A, B \subset \mathcal{H}$ heißen <u>orthogonal</u> $(A \perp B)$, falls

$$\langle x,y\rangle = 0 \quad \forall x \in A, y \in B$$

3) Für $A \subset \mathcal{H}$ ist sein <u>orthogonales Komplement</u> $A^\perp$ gegeben durch

$$A^\perp := \{x \in \mathcal{H} \mid x \perp A\}$$

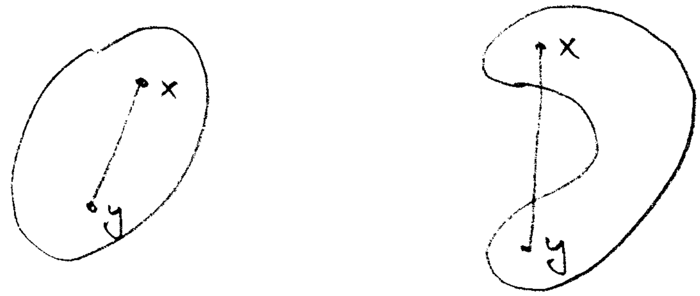
Wir betrachten nun folgendes Problem:



Was ist beste Approximation von $x \in \mathcal{H}$ durch ein $x_0 \in A$?

2.2 Definition: Sei V ein Vektorraum. Eine Menge $A \subset V$ heißt konvex, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in A \\ 0 \le t \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow tx + (1-t)y \in A$$



konvex

nicht konvex

Im Folgenden ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum!

2.3 Satz. Sei $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gibt es dann einen eindeutig bestimmten Punkt $x_0 \in A$, so dass

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

<u>Beweis:</u> Gemäß Def. von $\operatorname{dist}(x, A)$ gilt es $y_n \in A$ s.d.

$$\|x - y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{dist}(x, A)$$

wir wollen zeigen: (y_n) konvergiert

dafür reicht 2.2: (y_n) ist Cauchyfolge

Gemäß Parallelogrammgleichung gilt

$$\|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2$$

$$= 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right)$$

$$\Rightarrow \|y_m - y_n\|^2 = 2(\dots) - 4\underbrace{\|x - \underbrace{\tfrac{y_n+y_m}{2}}_{\in A}\|^2}_{\geq \operatorname{dist}(x,A)^2}$$

$$\leq 2\left(\underbrace{\|x-y_n\|^2}_{} + \underbrace{\|x-y_m\|^2}_{}\right) - 4 \cdot \operatorname{dist}(x,A)^2$$

$$\searrow \quad \swarrow \; {\scriptstyle n,m\to\infty}$$

$$\operatorname{dist}(x,A)^2$$

$\leq \varepsilon$ für n, m hinr. groß

$\Rightarrow (y_n)$ CF

$\mathcal{H}$ vollst $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathcal{H}: y_n \to x_0$

A abg. $\Rightarrow x_0 \in A$

$y \to \|y\|$ stetig $\Rightarrow \|x - y_n\| \to \|x - x_0\|$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{dist}(x, A)$$

$$\Rightarrow \|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, A)$$

Eindeutigkeit: Sei $x_1 \in A$ mit

$$\|x - x_1\| = \operatorname{dist}(x, A)$$

Wähle $(y_n) = (x_0, x_1, x_0, x_1, x_0, x_1, \dots)$

in obigem Argument

$\Rightarrow (y_n)$ konvergent

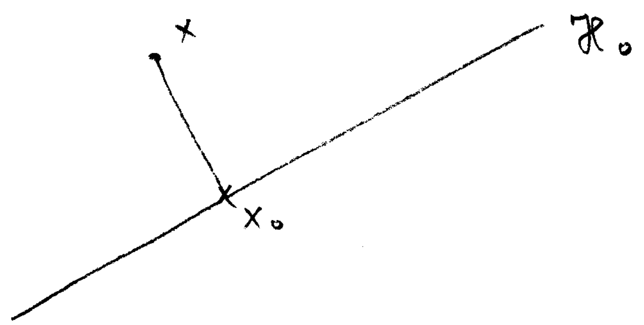
$\Rightarrow x_0 = x_1$ $\square$

Wir betrachten nun den speziellen Fall

$A = \mathcal{H}_0$ Unterhilbertraum

= abg. linearer Teilraum

beachte: linear $\Rightarrow$ konvex



2.4 Satz: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Für $x \in \mathcal{H}$ und $x_0 \in \mathcal{H}_0$ sind dann äquivalent:

(a) $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0)$

(b) $x - x_0 \perp \mathcal{H}_0$

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b)

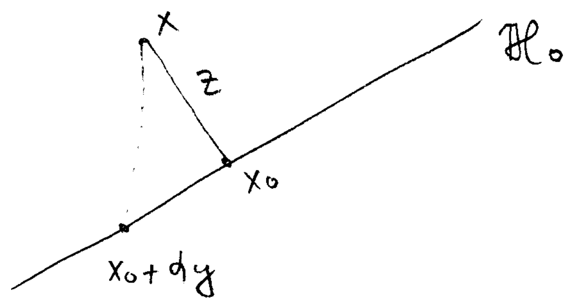
z.z.: $\langle x - x_0, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}_0$

o.E. $\|y\| = 1$

Setze $z := x - x_0$, dann gilt $\forall \alpha \in \mathbb{C}$:

$$\|z\|^2 = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0)^2$$

$$\leq \|x - \underbrace{(x_0 + \alpha y)}_{\in \mathcal{H}_0}\|^2$$



$$= \|z - \alpha y\|^2$$

$$= \langle z - \alpha y, z - \alpha y \rangle$$

$$= \langle z, z \rangle - \alpha \langle y, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y \rangle + |\alpha|^2 \underbrace{\langle y, y \rangle}_{= 1}$$

Wähle $\alpha = \langle z, y \rangle$

$\Rightarrow 0 \leq -|\alpha|^2$

$\Rightarrow 0 = \alpha = \langle z, y \rangle$

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $y \in \mathcal{H}_0$

$$\Rightarrow \|x-y\|^2 = \|\underbrace{(x-x_0)}_{\perp \mathcal{H}_0} + \underbrace{(x_0-y)}_{\in \mathcal{H}_0}\|^2$$

$$\overset{\text{Pythagoras}}{=} \|x-x_0\|^2 + \|x_0-y\|^2$$

$$\geq \|x-x_0\|^2 \qquad \square$$

2.5 Def.: Seien $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ abgeschlossene lineare Teilräume (d. h. Unterhilberträume) eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1$. Dann heißt

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 = \{x+y \mid x \in \mathcal{H}_0, y \in \mathcal{H}_1\} \subset \mathcal{H}$$

(orthogonale) direkte Summe von $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$.

2.6. Bemerkung: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ heißt also:

- jedes $x \in \mathcal{H}$ kann geschrieben werden als

  $$x = x_0 + x_1 \quad \text{mit} \quad x_0 \in \mathcal{H}_0,\ x_1 \in \mathcal{H}_1$$

- diese Darstellung ist eindeutig

$$x_0 + x_1 = x = x_0' + x_1' \Rightarrow \underbrace{x_0 - x_0'}_{\in \mathcal{H}_0} = \underbrace{x_1 - x_1'}_{\in \mathcal{H}_1} \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1 = \{0\}$$

$$\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1 \Rightarrow x \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1 : \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

2.7 Satz: Sei $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ Unterhilbertraum.

Dann gilt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$$

Beweis: beachte: $A^\perp$ ist immer abgeschlossen für beliebiges $A \subset \mathcal{H}$; $\mathcal{H}_0^\perp$ ist linearer Teilraum

$\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_0^\perp$ klar

nach 2.2.: $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H}$

Sei $x \in \mathcal{H}$

$\overset{2.3}{\Longrightarrow}$ $\exists\, x_0 \in \mathcal{H}_0$ mit $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0)$

$\overset{2.4.}{\Longrightarrow}$ $x - x_0 \perp \mathcal{H}_0$, d.h. $x - x_0 \in \mathcal{H}_0^\perp$

$$\Longrightarrow \quad x = \underset{\mathcal{H}_0}{\underset{\cap}{x_0}} + \underbrace{(x - x_0)}_{\in \mathcal{H}_0^\perp}$$

$\square$

2.8 Satz: Sei $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ Unterhilbertraum.

Für $x \in \mathcal{H}$ definiere

$Px = x_0$ wobei $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0)$, $x_0 \in \mathcal{H}_0$

$(\Longleftrightarrow x - x_0 \perp \mathcal{H}_0)$

Dann gilt:

1) $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist lineare Abbildung

2) $\| Px \| \leq \| x \| \quad \forall x \in \mathcal{H}$

3) $P^2 = P$ (wobei $P^2(x) = P(P(x))$)

4) $\ker P = \mathcal{H}_0^\perp$, $\operatorname{ran} P = \mathcal{H}_0$

[$\ker P := \{ x \in \mathcal{H} \mid Px = 0 \}$ Kern (kernel)

$\operatorname{ran} P := \{ Px \in \mathcal{H} \mid x \in \mathcal{H} \}$ Bild (range)]

Beweis: Übungsaufgabe! □

2.9 Notation P heißt orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_0$.

2.10 Def.: Ein lineares Funktional auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine Abbildung $L : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, für die gilt:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \; x, y \in \mathcal{H}$$

2.11. Bem. 1) Für lineare Abb schreibt man oft Lx statt $L(x)$.

2) Im Endlichdimensionalen ist jede lineare Abb. stetig. Im Unendlichdimensionalen gilt dies nicht mehr!

2.12. Satz: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $L: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional.

Dann sind äquivalent:

a) L ist stetig

b) L ist in 0 stetig

c) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$|L(x)| \leq c\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) ✓

b) $\Rightarrow$ c) L stetig in 0, d.h. für $\varepsilon = 1$

$\exists\, \delta > 0$ so dass

$\|y\| \leq \delta \Rightarrow |L(y)| \leq 1$ (beachte: $L(0) = 0$)

Betrachte nun $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$; setze $y := \frac{\delta}{\|x\|} x$

$$\Rightarrow \|y\| = \delta \Rightarrow \underbrace{|L(y)|}_{= \frac{\delta}{\|x\|} |L(x)|} \leq 1$$

$$\Rightarrow |L(x)| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$$

Setze $c := \frac{1}{\delta}$

(c) $\Rightarrow$ (a) : Sei $x_n \to x$, d.h. $\|x_n - x\| \to 0$

$$\Rightarrow |L(x-x_n)| \leq c\,\|x - x_n\| \longrightarrow 0$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$|L(x) - L(x_n)|$$

$$\Rightarrow L(x_n) \longrightarrow L(x)$$

d.h. L ist stetig □

2.13 Def.: 1) Ein lineares Funktional $L: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, welches die Bedingungen in 8.13 erfüllt, heißt beschränktes (oder stetiges) lineares Funktional

2) Die Menge aller beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{H}$ heißt Dualraum von $\mathcal{H}$.

Notation: $\mathcal{H}^*$ (oder $\mathcal{H}'$)

2.14 Bemerkung: Der Dualraum hat eine kanonische Vektorraumstruktur vermöge

$$(L_1 + L_2)(x) := L_1(x) + L_2(x)$$

$$(\lambda L)(x) := \lambda L(x)$$

und trägt eine kanonische Norm

$$\|L\| := \sup\{\, |L(x)| \mid \|x\| \leq 1 \,\}$$

($\|L\|$ ist das kleinste c mit $|L(x)| \leq c\,\|x\| \;\forall x \in \mathcal{H}$)

2.15 Bemerkung: Was ist Dualraum von Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Sei $x_0 \in \mathcal{H}$

Definiere $L(x) := \langle x, x_0 \rangle$

$\Rightarrow$ L linear und

$$|L(x)| = |\langle x, x_0 \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|x\| \cdot \|x_0\|$$

$\Rightarrow$ $L \in \mathcal{H}^*$ und $\|L\| \leq \|x_0\|$

gilt sogar $\|L\| = \|x_0\|$, da

für $x = x_0$ Gleichheit in C-S, also

$$|L(x_0)| = \|x_0\| \cdot \|x_0\|$$

Rieszsche Darstellungsatz sagt, dass dies schon alle $L \in \mathcal{H}^*$ sind, d.h. $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$

2.16. Satz (Rieszsche Darstellungsatz für HR)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $L \in \mathcal{H}^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $x_0 \in \mathcal{H}$, so dass

$$L(x) = \langle x, x_0 \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Außerdem gilt: $\|L\| = \|x_0\|$

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit: Sei

$$\langle x, x_0 \rangle = \langle x, x_1 \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \langle x, x_0 - x_1 \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

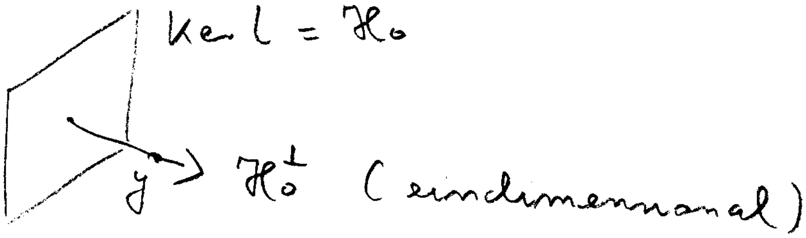
$$\overset{x = x_0 - x_1}{\Longrightarrow} \langle x_0 - x_1, x_0 - x_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = x_1$$

Existenz: $L \equiv 0 \Longleftrightarrow x_0 = 0$

betrachte also $L \not\equiv 0$

Idee



$\mathcal{H}_0 := \ker L$ abgeschlossener linearer Teilraum

$\uparrow$

da L stetig

$$L \not\equiv 0 \Rightarrow \mathcal{H}_0^\perp \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow \exists y \in \mathcal{H}_0^\perp, \text{ o.E. } L(y) = 1$$

Betrachte nun $x \in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow L(x - L(x)y) = L(x) - L(x)\underbrace{L(y)}_{=1} = 0$$

$$\Rightarrow x - L(x)y \in \mathcal{H}_0$$

(d.h. insbesondere $\mathcal{H}_0^\perp = \mathbb{C}y$ eindim.)

$$\Rightarrow \langle x - L(x)y, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = L(x) \langle y, y \rangle$$

$$\Rightarrow L(x) = \frac{1}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle$$

also setze $x_0 = \frac{y}{\|y\|^2}$

$\|L\| = \|x_0\|$ folgt aus 2.15 □

<u>2.17. Bemerkung:</u> 1) Dies sagt also, dass alle stetigen linearen

$L : L^2(\mu) \to \mathbb{C}$

von folgender Form sind

$L(f) = \int f g \, d\mu$ für ein $g \in L^2(\mu)$

2) Die entsprechende Frage nach beschränkten

$L : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$

für $p \neq 2$ ist viel schwieriger!

Hölder sagt uns, dass

$L(f) = \int f g \, d\mu$

stetig auf L^p ist, falls $g \in L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Für $p \neq \infty$ sind dies wiederum alle, aber wie man g aus L gewinnt ist nicht so klar ohne Orthogonalität. Dies wird später behandelt.