3. Beschränkte Operatoren auf Hilberträumen

3.1. Satz: Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $A: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ lineare Abbildung.
Dann sind äquivalent:

a) A ist stetig

b) A ist in 0 stetig

c) Es gilt Konstante $c > 0$ mit

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Beweis: analog zu 2.12

(b) $\Rightarrow$ (c): A stetig in 0, d.h. $\exists\, \delta > 0$ s.d.

$$\|y\| \leq \delta \Rightarrow \|Ay\| \leq 1$$

Setze $c = \frac{1}{\delta}$

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei $x_n \to x$, d.h. $\|x - x_n\| \to 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\|A(x - x_n)\|}_{= \|Ax - Ax_n\|} \leq c\|x - x_n\| \to 0$$

$$\Rightarrow Ax_n \to Ax$$

3.2. Def.: Sei $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ linear. Setze

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathcal{H} \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| \qquad \text{(Operator-) Norm von } A$$

Falls $\|A\| < \infty$, so heißt A beschränkt

$$B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) := \{ A : \mathcal{H} \to \mathcal{K} \text{ linear} \mid \|A\| < \infty \}$$

$$B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

3.3. Bem.: 1) $\|A\|$ ist kleinste Konstante c in

$$\|Ax\| \leq c \, \|x\|$$

insbesondere gilt

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

2) Es gilt auch: $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Im Folgenden ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum!

3.4 Satz: 1) $B(\mathcal{H})$ ist Vektorraum vermöge

$$(A+B)(x) := Ax + Bx$$

$$(\lambda A)(x) := \lambda \cdot A(x) \qquad (A, B \in B(\mathcal{H}), \lambda \in \mathbb{C})$$

2) $B(\mathcal{H})$ versehen mit $\|\cdot\|$ ist normierter Vektorraum

3) $B(\mathcal{H})$ ist vollständig, also Banachraum.

4) $B(\mathcal{H})$ ist Algebra bezüglich Komposition

$$(AB)(x) := A(B(x)) \qquad (A, B \in B(\mathcal{H}))$$

Es gilt : $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

(d.h. $B(\mathcal{H})$ ist "Banachalgebra")

Beweis: 1) nachrechnen

2) nachrechnen

z.B : $\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \underbrace{\|(A+B)x\|}$

$$= \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|$$

$$= \|A\| + \|B\|$$

$\|A\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| \leq 0 \quad \|x\| = 0$

$\Rightarrow Ax = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow A = 0$

3) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $B(\mathcal{H})$

z.z. : $\exists A \in B(\mathcal{H})$ mit $A_n \to A$

(d.h. $\|A_n - A\| \to 0$)

Sei $x \in \mathcal{H}$.

$\Rightarrow \| A_n x - A_m x \| = \| (A_n - A_m) x \| \leq \| A_n - A_m \| \, \| x \|$

$\Rightarrow (A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$ vollständig $\Rightarrow \exists \, y \in \mathcal{H}$ mit $A_n x \to y$

Definiere $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $Ax := y$

A ist linear, da

$$\left.\begin{aligned} A_n x_1 &\to y_1 \\ A_n x_2 &\to y_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_n(x_1 + x_2) \to y_1 + y_2$$

also: $A(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 = A x_1 + A x_2$

Außerdem gilt:

$$\| Ax - A_n x \| \leq \underbrace{\| Ax - A_m x \|}_{\substack{\text{beliebig klein} \\ \text{für } m \to \infty}} + \underbrace{\| A_m x - A_n x \|}_{\leq \underbrace{\| A_m - A_n \|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n, m \geq N(\varepsilon)} \cdot \| x \|}$$

$\overset{m \to \infty}{\Longrightarrow} \| Ax - A_n x \| \leq \varepsilon \| x \|$ falls $n \geq N(\varepsilon)$

(unabhängig von x)

$$\Rightarrow \| Ax \| \leq \underbrace{\| A_n x \|}_{\leq \| A_n \| \, \| x \|} + \varepsilon \| x \|$$

$$\leq (\| A_n \| + \varepsilon) \| x \|$$

$\Rightarrow \|A\| \leq \|A_n\| + \varepsilon$, d.h. $A \in B(\mathcal{H})$

und : $\left.\begin{array}{l} \|(A - A_n)x\| \leq \varepsilon \|x\| \\ \Rightarrow \quad \|A - A_n\| \leq \varepsilon \end{array}\right\}$ für $n \geq N(\varepsilon)$

$\Rightarrow A_n \to A$

4) $\|ABx\| \leq \|A\| \, \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$

$\Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\Rightarrow AB \in B(\mathcal{H})$ $\square$

<u>3.5. Beispiele</u>: 1) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$

$(e_i)_{i=1}^n$ ONB von $\mathbb{C}^n$

$A \in B(\mathbb{C}^n) \Rightarrow A e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$

also $A \mathrel{\hat{=}} (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$

$B(\mathbb{C}^n) \mathrel{\hat{=}} M_{n \times n}$ $n \times n$ - Matrizen

2) $\mathcal{H} = L^2(\mu)$

$k \in L^2(\mu \times \mu)$, d.h.

$\int |k(s,t)|^2 \, d\mu(s) \, d\mu(t) < \infty$

Definiere Operator
$K : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ durch

$$(Kf)(s) = \int k(s,t) f(t) \, d\mu(t)$$

K ist linear und es gilt:

$$\|Kf\|^2 = \int |(Kf)(s)|^2 \, d\mu(s)$$

$$= \int \underbrace{\left| \int k(s,t) f(t) \, d\mu(t) \right|^2}_{\overset{C-S}{\leq} \int |k(s,t)|^2 d\mu(t) \cdot \int |f(t)|^2 d\mu(t)} d\mu(s)$$

$$\leq \iint |k(s,t)|^2 \, d\mu(t) \, d\mu(s) \cdot \int |f(t)|^2 \, d\mu(t)$$

$$= \|k\|^2_{L^2(\mu \times \mu)} \cdot \|f\|^2_{L^2(\mu)}$$

$\Rightarrow \|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu \times \mu)}$, also $K \in B(\mathcal{H})$

K heißt <u>Integraloperator</u> (oder Hilbert-Schmidt-Operator) mit Kern k

beachte: Kerne $\hat{=}$ kontinuierliche Analoga von Matrizen aber: nicht jeder beschränkte Operator auf $L^2(\mu)$ ist Integraloperator

z.B: $\dim \mathcal{H} = \infty \Rightarrow A = id$ ist kein Integraloperator

3) Betrachte speziellen Integraloperator

$\mathcal{H} = L^2([0,1], \lambda)$

$$k(s,t) = \begin{cases} 0 & s \leq t \\ 1 & s > t \end{cases}$$

d.h.

$$(Vf)(s) = \int_0^s f(t)\, dt \qquad (0 \leq s \leq 1)$$

$V \mathrel{\hat{=}}$ Integration

V heißt <u>Volterra-Operator</u>

Es gilt: $\|V\| = \frac{2}{\pi}$ nicht-trivial

(nach (2) gilt: $\|V\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$)

3.6 Satz: Sei $A \in B(\mathcal{H})$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $A^* \in B(\mathcal{H})$ mit

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

3.7. Def.: A^* heißt der zu A adjungierte Operator.

Beweis: Sei $y \in \mathcal{H}$ fest; betrachte die Abb.

$$L : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

L ist linear und beschränkt

(denn: $|Lx| = |\langle Ax, y \rangle| \overset{C-S}{\leq} \|Ax\| \cdot \|y\|$
$\leq \|A\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow \|L\| \leq \|A\| \cdot \|y\|$)

also: $L \in \mathcal{H}^*$

$\overset{\text{Riesz}}{\underset{2.16}{\Longrightarrow}} \exists\, y_0 \in \mathcal{H}$ mit $L(x) = \langle x, y_0 \rangle$

$$L(x) = \langle Ax, y \rangle$$

Definiere nun $A^*: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $A^* y = y_0$

(Beachte: y_0 gemäß Riesz eindeutig bestimmt)

Es gilt: • A^* linear

• A^* beschränkt:

$$\begin{array}{c} \|y_0\| \overset{2.16}{=} \|L\| \le \|A\| \cdot \|y\| \\ \| \\ \|A^* y\| \end{array}$$

$\Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|$

$\Rightarrow A^* \in B(\mathcal{H})$ $\square$

<u>3.8 Satz:</u> Seien $A, B \in B(\mathcal{H})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Es gilt:

1) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$

2) $(AB)^* = B^* A^*$

3) $A^{**} = A$

4) Sei A invertierbar in $B(\mathcal{H})$

(d.h. $\exists A^{-1} \in B(\mathcal{H})$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$)

Dann folgt: A^* invertierbar und

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

5) $\|A\| = \|A^*\|$

6) $\|A\|^2 = \|AA^*\|$

<u>3.9. Notation</u>: Eine Banachalgebra mit Involution, so dass (1) – (5) erfüllt sind, heißt <u>Banach-$*$-Algebra</u>.
Gilt zusätzlich noch (6), so heißt die Algebra eine <u>C^*-Algebra</u>.
(6) ist die <u>C^*-Identität</u>; sie kodiert in abstrakter Form die Tatsache, dass wir im Hintergrund ein Skalarprodukt haben.

<u>3.10. Beispiele</u>: 1) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $B(\mathbb{C}^n) \mathrel{\hat{=}} M_{n\times n}$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \quad \Rightarrow \quad A^* = (\bar{a}_{ji})_{i,j=1}^n$$

2) $\mathcal{H} = L^2(\mu)$

K Integraloperator mit Kern k

$\Rightarrow K^*$ —— " —— k^*

wobei $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$

Beweis von 3.8.: (1) – (4): nachrechnen!

(5): im Beweis von 3.6. wurde gezeigt

$$\left.\begin{array}{l} \|A^*\| \leq \|A\| \\ \overset{A \rightsquigarrow A^*}{\Longrightarrow} \quad \|A\| \overset{(3)}{=} \|A^{**}\| \leq \|A^*\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|A\| = \|A^*\|$$

(6) $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$

$$= \langle A^*Ax, x\rangle$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|A^*Ax\| \cdot \|x\|$$

$$\leq \|A^*A\| \, \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \, \|A\| \overset{(5)}{=} \|A\|^2$$

$\Rightarrow$ alle "$\leq$" sind "$=$", also

$$\|A\|^2 = \|A^*A\|$$

$\square$

3.11. Satz: Sei $A \in B(\mathcal{H})$. Dann gilt

$$\ker A = (\operatorname{ran} A^*)^\perp$$

3.12. Bem.: beachte: $E^\perp$ ist (für $E \subset \mathcal{H}$) immer abg., das Gleiche gilt für $\ker A$; aber i.a. nicht für $\operatorname{ran} A^*$; "duale" Version lautet daher

$$(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{ran} A^*}$$

<u>Beweis von 3.11.:</u> "$\subset$": Sei $x \in \ker A$

Betrachte $y \in \operatorname{ran} A^*$, d.h. $y = A^* z$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle x, A^* z\rangle = \langle \underbrace{Ax}_{=0}, z\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \perp y \quad \forall y \in \operatorname{ran} A^*$$

$$\Rightarrow x \in (\operatorname{ran} A^*)^\perp$$

"$\supset$" Sei $x \in (\operatorname{ran} A^*)^\perp$, d.h.

$$x \perp y \quad \forall y = A^* z \in \operatorname{ran} A^*$$

$$\Rightarrow \langle x, A^* z\rangle = 0 \quad \forall z \in \mathcal{H}$$

$$\parallel$$

$$\langle Ax, z\rangle$$

$$\overset{z = Ax}{\Rightarrow} \langle Ax, Ax\rangle = 0$$

$$\Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker A$$

$\square$

<u>3.13. Def.</u>: 1) $A \in B(\mathcal{H})$ heißt <u>selbstadjungiert</u> (oder <u>hermitesch</u>), falls $A = A^*$

2) $A \in B(\mathcal{H})$ heißt <u>normal</u>, falls $AA^* = A^*A$

3) $\mathcal{U} \in B(\mathcal{H})$ heißt <u>unitär</u>, falls

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = 1$$

4) $V \in B(\mathcal{H})$ heißt <u>isometrisch</u> (oder <u>Isometrie</u>), falls

$$V^* V = 1$$

5) $P \in B(\mathcal{H})$ heißt <u>(orthogonale) Projektion</u>, falls $P^* = P = P^2$

<u>3.14. Bem.</u> Isometrie bedeutet

$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx \rangle = \langle V^* V x, x \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

also

$$\|Vx\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Dies impliziert, dass V injektiv ist. Im Unendlichdimensionalen folgt aber nicht, dass V auch surjektiv sein muß!

V Isometrie + surjektiv $\iff$ V unitär (also bijektiv)

3.15 Satz: 1) Für $A \in B(\mathcal{H})$ gilt:

(i) $\langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \implies A = 0$

(ii) $A = A^* \iff \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{H}$

2) Für selbstadjungiertes $A \in B(\mathcal{H})$ gilt:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} |\langle Ax, x \rangle|$$

Beweis: Übungsaufgabe! $\square$