4. Banachräume $\qquad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

4.1. Def.: 1) Ein normierter Raum ist ein Vektorraum X versehen mit einer Norm.

2) Ein Banachraum ist ein normierter Raum, der bzgl. seiner Norm vollständig ist.

4.2. Beispiele: 1) $K \subset \mathbb{R}$ kompakt

$C(K) := \{ f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig} \}$ ist Banachraum bzgl.

$$\|f\| := \max_{t \in K} |f(t)|$$

2) Sei μ Maß auf $\mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$

$$L^p(\mu) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \mid \int |f(t)|^p \, d\mu(t) < \infty \}$$

ist Banachraum bzgl.

$$\|f\|_p := \left(\int |f(t)|^p \, d\mu(t) \right)^{1/p}$$

$p = \infty$ ist folgendermaßen zu interpretieren:

$$L^\infty(\mu) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \mid \exists\, C : \mu\{ t \mid |f(t)| > C \} = 0 \}$$

$$\|f\|_\infty := \inf \{ C \mid \mu\{ t \mid |f(t)| > C \} = 0 \}$$

L^p ist Hilbertraum genau dann wenn $p = 2$!

3) diskrete Version von 2)

$$\ell_p := \ell_p(\mathbb{N}) := \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^p < \infty\}$$

$$\|(\alpha_n)\|_p := \left(\sum |\alpha_n|^p\right)^{1/p}$$

$$\ell_\infty := \ell_\infty(\mathbb{N}) := \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| < \infty\}$$

$$\|(\alpha_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|$$

ℓ_p ist Banachraum für $1 \le p \le \infty$

Hilbertraum $p = 2$

4) abgeschlossene Unterräume von ℓ_∞:

$$c := \{(\alpha_n) \mid \lim_{n\to\infty} \alpha_n \text{ existiert}\}$$

$$c_0 := \{(\alpha_n) \mid \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\}$$

<u>4.3 Satz:</u> Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

1) $+ : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto x+y$ ist stetig

2) $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ ist stetig

3) $\|\cdot\| : X \to \mathbb{K}$ ist stetig

<u>Beweis:</u> 1) $x_n \to x$, $y_n \to y$

$$\|(x_n + y_n) - (x+y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \Rightarrow x_n + y_n \to x+y$$

3) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$

$\square$

4.4. Satz: Seien X und Y normierte Räume und $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) A ist stetig

b) A ist stetig in 0

c) Es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|Ax\| \leq c\,\|x\| \qquad \forall x \in X$$

Beweis: analog zu 3.1, 2.12

b) $\Rightarrow$ c) : A stetig in $0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0$ mit

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|Ax\| \leq 1$$

Setze $c = \frac{1}{\delta}$ $\square$

4.5. Definition: Sei $A : X \to Y$. Setze

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|$$ (Operator-) Norm von A

$\|A\| < \infty \quad :\Leftrightarrow \quad A$ beschränkt

$$B(X,Y) := \{ \underset{\text{linear}}{A : X \to Y} \mid \|A\| < \infty \}$$

Insbesondere:

$$B(X) := B(X,X)$$

$X^* := B(X, \mathbb{K})$ Dualraum von X

4.6. Satz: 1) Seien X, Y normierte Räume.

i) $B(X,Y)$ versehen mit Operatornorm und punktweiser Addition und skalarer Multiplikation ist normierter Raum.

ii) Ist Y ein Banachraum, so ist auch $B(X,Y)$ ein Banachraum.
Insbesondere ist also X^* für jeden normierten Raum ein Banachraum.

2) Sei X Banachraum. Dann ist $B(X)$ Banachalgebra bzgl. Komposition, d. h. es gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

Beweis: analog zu 3.4.

insbesondere $\underset{\text{Vollständigkeit}}{1\,ii)}$: (A_n) CF in $B(X,Y)$

$\Rightarrow$ $(A_n x)$ CF in Y für jedes $x \in X$

$$\overset{Y\,BR}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \text{existiert}$$

$$\overset{..}{\underset{}{=}}$$

$$Ax$$

zeige $A \in B(X,Y)$

$A_n \to A$

wie in 3.4.

□

4.7. Beispiele für Dualräume: Es gilt:

$$c_0^* = c^* = \ell_1 \quad , \quad \ell_1^* = \ell_\infty$$

$$\ell_p^* = \ell_q \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty$$

$$\text{wobei} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(d.h. $p = 2 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow \ell_2^* = \ell_2$)

Somit können je nach Banachraum verschiedene Phänomene auftreten:

$c_0 \neq c$ aber $c_0^* = c^*$

$1 < p < \infty$: $\ell_p^{**} = (\ell_p^*)^* = \ell_q^* = \ell_p$, d.h. $\ell_p^{**} = \ell_p$

Banachräume mit $X^{**} = X$ heißen reflexiv

also: ℓ_p für $1 < p < \infty$ reflexiv

$c_0, c, \ell_1, \ell_\infty$ nicht reflexiv,

z.B. $c^{**} = \ell_1^* = \ell_\infty \neq c$

Beweis für $c_0^* = \ell_1$:

Sei $x \in \ell_1$, d.h. $x = (\beta_n)$ mit $\sum |\beta_n| < \infty$

Def.: $L_x : c_0 \to \mathbb{K}$ durch $L_x(\underbrace{(\alpha_n)}_{y}) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \beta_n$ $\quad y \in c_0$

Es gilt: $|L_x(y)| = |\sum \alpha_n \beta_n|$

$$\leq \sum |\alpha_n| \, |\beta_n|$$

$$\leq \|y\| \underbrace{\sum |\beta_n|}_{\|x\|_1} \qquad \|y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$$

$\Rightarrow L_x \in c_0^*$ mit $\|L_x\| \leq \|x\|_1$

Sei umgekehrt $L \in c_0^*$ gegeben.

Setze $e_n \in c_0$ mit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
$\uparrow$ n-te Stelle

und $\beta_n := L(e_n)$

Beh.: $L((\alpha_n)) = \sum \alpha_n \beta_n$, d.h. $L = L_x$ mit $x = (\beta_n)$

Sei $y = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c$

Setze $y_n := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, 0, \dots)$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$$

Es gilt: $y_n \to y$ in c_0, denn

$$\|y_n - y\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k e_k\|_\infty = \|(0, \dots, 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots)\|_\infty$$

$$= \sup_{k > n} |\alpha_k|$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{da } y \in c_0, \text{ d.h. } \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

also: $y_n \to y \overset{L \text{ stetig}}{\Longrightarrow} L(y_n) \xrightarrow{n \to \infty} L(y)$

$$L(y_n) = L\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k$$

$$\Rightarrow L(y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$$

also: $L \in c_0^* \Rightarrow \exists x$ mit $L = L_x$

noch z.z.: $x \in \ell_1$: Sei $x \notin \ell_1$, d.h. $\sum |\beta_n| = \infty$

Es gilt aber: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\beta_n| < \infty$ für alle $(\alpha_n) \in c_0$

$\left(\alpha_n \rightsquigarrow \alpha_n \frac{|\beta_n|}{\beta_n} \right.$ ersetzt $\left. \sum \alpha_n \beta_n \rightsquigarrow \sum \alpha_n |\beta_n| \right)$

Wähle nun N_n so daß

$$n \leq \sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} |\beta_k| \qquad (N_1 = 0)$$

und setze

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \qquad \text{für} \quad N_n + 1 \leq k \leq N_{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |\beta_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} |\beta_k|}_{\geq n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Wdsp $\Rightarrow x \in \ell_1$ %.

Wir haben also Isomorphismus

$$\ell_1 \to c_0^*$$
$$x \mapsto L_x$$

$\boxed{L_x(y) = \sum \alpha_n \beta_n = \langle y, x \rangle \text{ für } y = (\alpha_n) \in c_0,\ x = (\beta_n) \in \ell_1}$

Es gilt sogar $\|x\|_1 = \|L_x\|$

denn: $\|L_x\| \leq \|x\|_1$ nach oben

und $\|L_x\| \geq \|L_x y\|$ für $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty = 1$

Wähle $y = \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot \frac{|\beta_k|}{\beta_k}$

$$\Rightarrow L_x y = \sum_{k=1}^{n} L(e_k) \frac{|\beta_k|}{\beta_k} = \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| \xrightarrow{n \to \infty} \|x\|_1$$

also $\|L_x\| \geq \|x\|_1$.

Somit ist c_0^* isometrisch isomorph $\overset{\text{zu } \ell_1}{\text{im}}$ folgenden Sinne.

<u>5.8. Def.</u>: X und Y seien normierte Räume.

1) X und Y heißen <u>isometrisch isomorph</u>, falls es eine lineare isometrische Bijektion $T: X \to Y$ gibt (d.h. $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$)

2) X und Y heißen <u>isomorph</u>, falls es eine lineare Bijektion $T: X \to Y$ gibt, die ein Homeomorphismus ist (d.h. T, T^{-1} stetig, d.h. beschränkt)

<u>5.9. Bem.</u>: Isometr. Isomorphismus erhält Normen, Isomorphismus führt Normen in äquivalente Normen über $\left(\frac{1}{\|T^{-1}\|} \|x\| \leq \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \right)$, erhält also die Topologie.