# 5. Der Satz von Hahn-Banach

**5.1 Def.:** Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1) Ein <u>sublineares Funktional</u> ist eine Funktion

$q : V \to \mathbb{R}$ mit

i) $q(x+y) \leq q(x) + q(y) \qquad \forall x, y \in V$

ii) $q(\alpha x) = \alpha q(x) \qquad \forall x \in V,\ \alpha \geq 0$

2) Eine <u>Halbnorm</u> ist eine Funktion

$p : V \to [0, \infty)$ mit

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in V$

ii) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \qquad \forall x \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}$

**5.2. Bem.:** Eine Halbnorm ist sublineares Funktional, aber nicht umgekehrt.

**5.3 Satz von Hahn-Banach** (reelle Version):

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $q$ ein sublineares Funktional auf $V$. Sei $M$ ein linearer Teilraum von $V$ und $l : M \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit $l(x) \leq q(x)$ für alle $x \in M$. Dann gibt es ein lineares Funktional $L : V \to \mathbb{R}$ mit $L|M = l$ und $L(x) \leq q(x)$ für alle $x \in V$.

<u>Beweis:</u> (1) Schritt auf eine Dimension mehr:

Sei $x_0 \in V \setminus M$ und $V_0 := \mathrm{span}(V, x_0)$

$$= \{ y + t x_0 \mid y \in M, t \in \mathbb{R} \}$$

z.z.: $\exists\, L_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ mit $L_0|M = \ell$ und $L_0(x) \leq q(x) \quad \forall x \in V_0$

beachte: Darstellung $x = y + t x_0$ für $x \in V_0$ ist eindeutig,

da sonst $y + t x_0 = \tilde{y} + \tilde{t} x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{y - \tilde{y}}{\tilde{t} - t} \in M$

Somit kann man $L_0$ eindeutig definieren durch Wahl von $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$L_0(y + t x_0) = \ell(y) + t L_0(x_0) = \ell(y) + t \cdot \alpha$$

Problem: $\alpha$ muß so gewählt werden, daß $L_0(x) \leq q(x)$

also: i) $L_0(y + t x_0) \leq q(y + t x_0)$

ii) $L_0(y - t x_0) \leq q(y - t x_0)$ $\quad \forall y \in M, t \geq 0$

i) $\Leftrightarrow \ell(y) + t\alpha \leq q(y + t x_0)$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \underbrace{\frac{1}{t} q(y + t x_0)}_{q(y/t + x_0)} - \ell(y/t)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq q(y_1 + x_0) - \ell(y_1) \qquad \forall y_1 \in M$$

ii) $\Leftrightarrow \ell(y) - t\alpha \leq q(y - t x_0)$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \ell(y/t) - \underbrace{\frac{1}{t} q(y - t x_0)}_{q(y/t - x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \geq \ell(y_2) - q(y_2 - x_0) \qquad \forall y_2 \in M$$

bleibt z.z.: $\exists \alpha$ mit

$$\ell(y_2) - q(y_2 - x_0) \leq \alpha \leq q(y_1 + x_0) - \ell(y_1) \qquad \forall y_1, y_2 \in M$$

also: $\ell(y_1 + y_2) \leq q(y_1 + x_0) + q(y_2 - x_0)$ — " —

Aber dies folgt aus

$$\ell(y_1 + y_2) \leq q(y_1 + y_2) = q((y_1 + x_0) + (y_2 - x_0))$$

$$\leq q(y_1 + x_0) + q(y_2 - x_0)$$

da $q$ sublinear %.

② "induktives" Schließen von $M$ auf $V$ (à la Zorn):

$\mathcal{S} := \{ (V_0, L_0) \mid V_0$ linearer Teilraum von $V$ mit $M \subseteq V_0$, $L_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ lineares Fkt mit $L_0 | M = \ell$, $L_0 \leq q$ auf $V_0 \}$

$(V_0, L_0), (V_1, L_1) \in \mathcal{S}$

$(V_0, L_0) \precsim (V_1, L_1) :\Longleftrightarrow V_0 \subseteq V_1,\ L_1 | V_0 = L_0$

$\Rightarrow (\mathcal{S}, \precsim)$ partiell geordnete Menge

Sei $\mathcal{C} = \{ (V_i, L_i) : i \in I \}$ Kette in $\mathcal{S}$ (d.h. zwei Elemente sind jeweils vergleichbar)

$\Rightarrow \exists$ obere Schranke $(N, L)$ von $\mathcal{C}$, nämlich

$N = \bigcup_{i \in I} V_i$ (linear, da $\mathcal{C}$ Kette)

$L(x) = L_i(x)$ für $x \in V_i$

Lemma von Zorn $\Rightarrow$ $\exists$ maximales Element $(Z, L)$ von $\mathcal{S}$

$\Rightarrow Z = V$, da sonst nach Schritt ① vergrößerbar

$\Rightarrow L : Z = V \to \mathbb{R}$ ist gesuchte Erweiterung. $\square$

## 5.4 Satz von Hahn-Banach (komplexe Version):

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $p : V \to [0, \infty)$ eine Halbnorm. Sei $M$ ein linearer Teilraum von $V$ und $\ell : M \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional mit $|\ell(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in M$. Dann gibt es ein lineares Funktional $L : V \to \mathbb{K}$ mit $L|M = \ell$ und $|L(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in V$.

<u>Beweis</u>: ① $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Da $\ell(x) \leq |\ell(x)| \leq p(x) \overset{5.3.}{\Rightarrow} \exists L : V \to \mathbb{R}$ mit

$L|M = \ell$ und

$L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V$

aber auch: $-L(x) = L(-x) \leq p(-x) = p(x)$ (da $p$ Halbnorm)

$\Rightarrow |L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in V$

② $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Sei $\ell_1 := \operatorname{Re} \ell$, d.h. $\ell_1 : M \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear mit $|\ell_1(x)| \leq |\ell(x)| \leq p(x)$

1. Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, L_1 : V \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}$-linear mit

$L_1|M = \ell_1$ und $|L_1(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in V$

Beachte: $\ell$ ergibt sich aus $\ell_1$ gemäß

$$\ell_1(x) = \operatorname{Re} \ell(x)$$

$$\Rightarrow \ell_1(ix) = \operatorname{Re} \ell(ix) = \operatorname{Re} i\ell(x) = -\operatorname{Im} \ell(x)$$

$$\Rightarrow \ell(x) = \ell_1(x) - i\,\ell_1(ix)$$

Demgemäß definieren wir $L$ durch

$$L(x) := L_1(x) - i\,L_1(ix)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow L \ \mathbb{R}\text{-linear} \\ &L(ix) = L_1(ix) - iL_1(-x) \\ &\qquad = iL_1(x) + L_1(ix) \\ &\qquad = i\,L(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L \ \mathbb{C}\text{-linear}$$

$L|M = \ell$ klar

noch z.z.: $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in V$

Sei $x \in V \leadsto$ Wähle $\mu$ mit $|\mu| = 1$ und $|L(x)| = \mu L(x)$

$$\Rightarrow |L(x)| = \mu L(x) = L(\mu x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da reell} \\ (= |L(x)|)}}{=} \operatorname{Re} L(\mu x) = L_1(\mu x) \leq p(\mu x) = p(x)$$

$\square$

**5.5. Korollar:** Sei $X$ ein normierter Raum, $M$ ein linearer Teilraum von $X$ und $\ell: M \to \mathbb{K}$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann gibt es ein $L \in X^*$ mit $L|M = \ell$ und $\|L\| = \|\ell\|$.

**Beweis:** Benutze 6.4. mit $p(x) = \|\ell\| \cdot \|x\|$

$(|\ell(x)| \leq \|\ell\| \cdot \|x\| \Rightarrow |L(x)| \leq \|\ell\| \, \|x\| \Rightarrow \|L\| \leq \|\ell\|)$ □

**5.6. Korollar:** Sei $X$ ein normierter Raum und $x \in X$. Dann gilt

$$\|x\| = \sup_{\substack{L \in X^* \\ \|L\| = 1}} |L(x)|.$$

Außerdem wird das Supremum angenommen, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es ein $L \in X^*$, $\|L\| = 1$ mit $L(x) = \|x\|$

**Beweis:** $\sup\limits_{\dots} |L(x)| \leq \|x\|$ klar, da $|L(x)| \leq \|L\| \, \|x\|$

"=": Sei $M := \{\alpha x \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ eindim. Unterraum von $X$

$\ell: M \to \mathbb{K}$ def. durch $\ell(\alpha x) = \alpha \|x\|$

$\Rightarrow \ell \in M^*$, $\|\ell\| = 1$

$\overset{5.5}{\Longrightarrow} \exists\, L \in X^*$ mit $L|M = \ell$ und $\|L\| = \|\ell\| = 1$

$$\Downarrow$$

$$L(x) = \ell(x) = \|x\|$$

□

5.7. Bemerkung: Die "Dualität"

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |L(x)| \quad \longleftrightarrow \quad \|x\| = \sup_{\substack{L \in X^* \\ \|L\|=1}} |L(x)|$$

legt es nahe zu schreiben

$$L(x) = \langle L, x \rangle \quad \text{für} \quad x \in X, \ L \in X^*$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Paarung zwischen $X$ und $X^*$

(beachte: $X$ HR $\Rightarrow$ $X \cong X^*$, $\langle \cdot, \cdot \rangle \hat{=}$ Skalarprodukt)

Oft schreibt man auch $x^*$ für Elemente aus $X^*$.

Frage: Was ist $X^{**}$.

Bei Hilberträumen und reflexiven Banachräumen gilt

$X^{**} = X$. Was kann man allgemein sagen?

5.8. Bem.: Sei $x \in X$; definiere $\hat{x} \in X^{**}$ durch

$\hat{x}(x^*) = x^*(x)$

- $\hat{x}$ linear
- $$\|\hat{x}\| = \sup_{\substack{x^* \in X \\ \|x^*\|=1}} |\hat{x}(x^*)| = \sup_{\substack{x^* \in X \\ \|x^*\|=1}} |x^*(x)| = \|x\|, \text{ also } \hat{x} \in X^{**}$$

Es gilt also: Die Abb. $x \mapsto \hat{x}$ von $X \to X^{**}$ definiert eine isometrische Einbettung von $X$ in sein zweites Dual.

Ist dies eine Bijektion, so heißt $X$ <u>reflexiv</u>.

5.9. Def.: Sei

$$\begin{aligned} \wedge : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto \hat{x} \end{aligned}$$

mit $\hat{x}(x^*) = x^*(x) \quad \forall \; x^* \in X^*$

die kanonische isometrische Einbettung von $X$ in $X^{**}$.

Falls dies eine Bijektion ist, so heißt $X$ reflexiv.