6. Satz von Baire und Folgerungen

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

6.1. Satz von Baire: Ist ein $\overbrace{\text{}}^{\text{nicht-trivialer}}$ Banachraum X Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Teilmengen F_n, so enthält mindestens eine der Mengen F_n einen inneren Punkt.

$$\left.\begin{array}{l} X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \\ F_n \text{ abgeschl.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists k : \mathring{F}_k \neq \emptyset$$

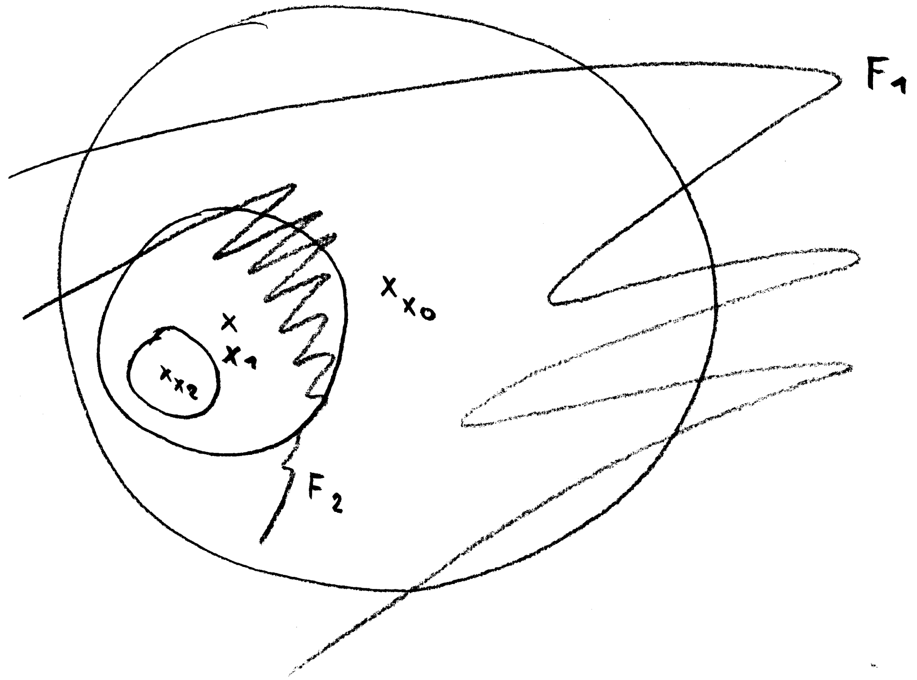
Beweis: indirekt: Sei $\mathring{F}_k = \emptyset \quad \forall k$

Wir zeigen: $\exists x \in X$ mit $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$

$\mathcal{U}_\varepsilon(x) := \{y \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$

beachte: $\mathring{F}_k = \emptyset \Rightarrow \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(x) \cap (X \setminus F_k)}_{\mathcal{U}_\varepsilon(x) \setminus F_k} \neq \emptyset \quad \forall x \in X, \varepsilon > 0$

Idee: konstr. Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mit $x_n \to x$ und $x \notin F_k \ \forall k$



Wähle x_0, ε_0 beliebig

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus F_1 \neq \emptyset$ und offen

$\Rightarrow$ $\exists\, x_1 \in X, \varepsilon_1$ mit: $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_0}(x) \setminus F_1$

(also $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1) \cap F_1 = \emptyset$)

o.B. sei $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ und $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1)} \cap F_1 = \emptyset$

analog: $\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus F_2 \neq \emptyset$ und offen

$\Rightarrow$ $\exists\, x_2 \in X, \varepsilon_2$ mit: $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus F_2$

(also: $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(x_2)} \cap F_2 = \emptyset$

$\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(x_2)} \cap F_1 = \emptyset$ (da $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset \overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}(x_1)}$)

o.B. sei $\varepsilon_2 \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \leq \frac{\varepsilon_0}{4}$

induktiv: Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1})} \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_n}(x_n) \setminus F_{n+1}$

und $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n}{2} \leq \frac{\varepsilon_0}{2^n}$

$\Rightarrow$ $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon_n$ (sei $m > n$), da $x_m \in \mathcal{U}_{\varepsilon_n}(x_n)$)

$\leq \frac{\varepsilon_0}{2^n}$

$\longrightarrow 0$ für n, m hinr. groß

$\Rightarrow$ (x_n) CF $\overset{X \text{ vollst.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, x \in X$: $x_n \to x$

noch z.z.: $x \notin \bigcup F_n$; Wähle festes k

$$x_n \in \mathcal{U}_{\varepsilon_k}(x_k) \quad \forall\, n \geq k$$

$$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_k}(x_k)} \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_{k-1}}(x_{k-1}) \setminus F_k$$

d.h. $x \notin F_k$ für beliebiges k

$$\Rightarrow \quad x \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$$

$\square$

6.2. Bem: 1) Satz gilt auch allgemeiner für vollständige metrische Räume.

2) Definieren wir (für $F \subset X$)

F nirgends dicht in X :$\Leftrightarrow$ $\overline{F}$ hat keine inneren Punkte

F von 1. Kategorie in X :$\Leftrightarrow$ $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, F_n nirgends dicht $\forall n \in \mathbb{N}$

F von 2. Kategorie in X :$\Leftrightarrow$ F nicht von 1. Kategorie,

so sagt 7.1. aus:

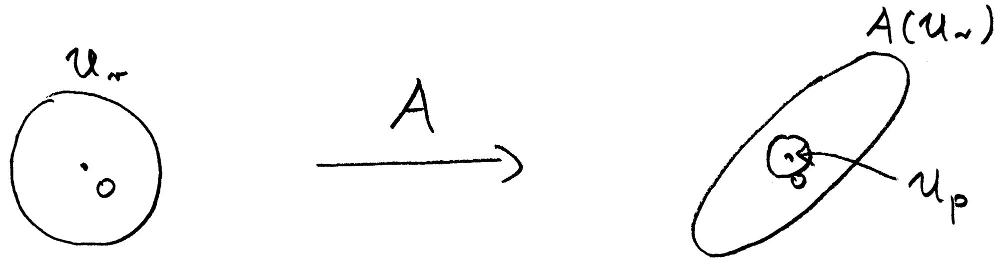
Ein Banachraum (oder vollständiger metrischer Raum) ist von 2. Kategorie in sich.

In dieser Form heißt er Bairescher Kategoriensatz.

6.3. Satz von der offenen Abbildung: Seien X, Y Banachräume und $A: X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung auf Y (d.h. A surjektiv). Dann ist für jede offene Menge $U \subset X$ auch das Bild $A(U) \subset Y$ offen.

Beweis: Hauptschritt ist z.z., daß A offen bei 0 ist, d.h.

(*) Für jede Kugel $U_r(0) \subset X$ gibt es Kugel $U_\rho(0) \subset Y$ mit $U_\rho(0) \subset A(U_r(0))$ (d.h. $0 \in A(U_r(0))^\circ \ \forall r$)



Sei (*) gezeigt: Sei $U \subset X$ offen und $y \in A(U)$, d.h. $y = Ax$ für $x \in U$

$\Rightarrow \exists$ Kugel $U_r(0) \subset X$ mit $\underbrace{x + U_r(0)}_{U_r(x)} \subset U$

(*) $\Rightarrow \exists$ Kugel $U_\rho(0) \subset Y$ mit $U_\rho(0) \subset A(U_r(0))$

$$\Rightarrow \quad y + U_\rho(0) \subset Ax + A(U_r(0)) = A(x + U_r(0)) \subset A(U)$$

Um (*) zu zeigen, zeigen wir

(i) Es gilt (*) mit der schwächeren Aussage $U_\rho(0) \subset \overline{A(U_r(0))}$

(ii) Es gilt immer: $\overline{A(U_{r/2}(0))} \subset A(U_r(0))$

(i) A surjektiv $\Rightarrow Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A(\mathcal{U}_{\frac{kr}{2}}(0))}$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} k\,\overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$$

$\overset{\text{Baire}}{\underset{7.1.}{\Longrightarrow}}$ $\exists k$ mit $k\,\overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$ enthält inneren Punkt y_0

d.h. $\exists s$: $\mathcal{U}_s(y_0) \subset k\,\overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$ $\Rightarrow \mathcal{U}_{\frac{s}{k}}(y_0/k) \subset \overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$

$\frac{s}{k} \rightsquigarrow s$, $\frac{y_0}{k} \rightsquigarrow y_0$

d.h. o.E. $\mathcal{U}_s(y_0) \subset \overline{A(\mathcal{U}_{r/2})}$

Wir zeigen nun: $\mathcal{U}_s(0) \subset \overline{A(\mathcal{U}_r(0))}$

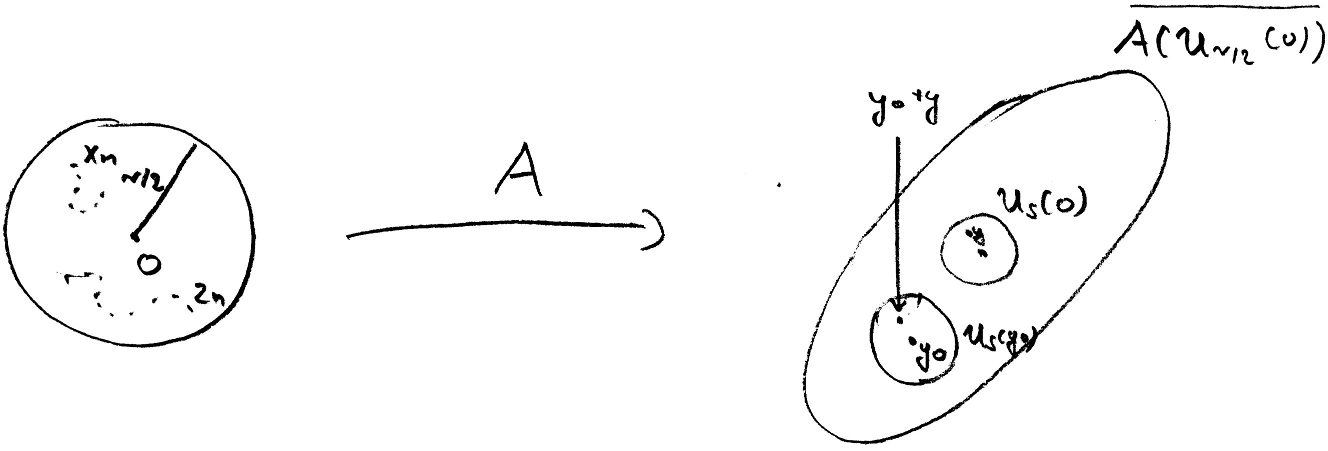
$y_0 \in \overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))} \Rightarrow \exists x_n \in \mathcal{U}_{r/2}(0)$ mit $A(x_n) \to y_0$

Sei $y \in \mathcal{U}_s(0) \Rightarrow y_0 + y \in \mathcal{U}_s(y_0) \subset \overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$

$\Rightarrow \exists z_n \in \mathcal{U}_{r/2}(0)$ mit $A(z_n) \to y_0 + y$

$\Rightarrow A(z_n - x_n) \to y$ und $z_n - x_n \in \mathcal{U}_r(0)$

$\Rightarrow y \in \overline{A(\mathcal{U}_r(0))}$



$x_n \in \mathcal{U}_{r/2}(0)$

$z_n \in \mathcal{U}_{r/2}(0)$

$\Rightarrow z_n - x_n \in \mathcal{U}_r(0)$

$A(x_n) \to y_0$

$A(z_n) \to y_0 + y$

$\Rightarrow A(z_n - x_n) \to y$

(ii) Gemäß (i) gibt es $p_n \overset{>}{\cancel{\to}} 0$ mit

$$\mathcal{U}_{p_n}(0) \subset \overline{A(\mathcal{U}_{r/2^n}(0))} \quad , \text{ o.B. } p_n \to 0$$

Sei nun $y \in \overline{A(\mathcal{U}_{r/2}(0))}$, z.z: $y \in A(\mathcal{U}_r(0))$

$\Rightarrow \exists\, y_1 \in A(\mathcal{U}_{r/2}(0))$ mit $\|y - y_1\| < p_2$

d.h. $y_1 = Ax_1$ mit $\|x_1\| < \frac{r}{2}$

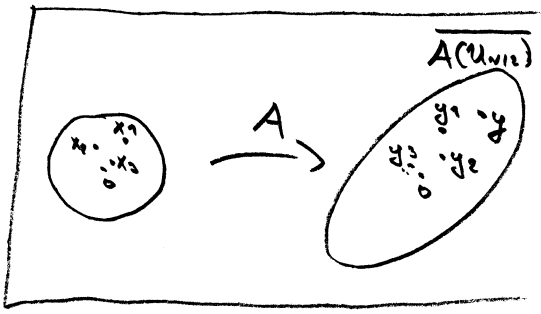
$$y - y_1 \in \mathcal{U}_{p_2}(0) \subset \overline{A(\mathcal{U}_{r/4}(0))}$$

$\Rightarrow \exists\, y_2 \in A(\mathcal{U}_{r/4}(0))$ mit $\|y - y_1 - y_2\| < p_3$

d.h. $y_2 = Ax_2$ mit $\|x_2\| < \frac{r}{4}$

induktiv: $\exists\, y_n \in A(\mathcal{U}_{r/2^n}(0))$ mit $\|y - y_1 - y_2 - \ldots - y_n\| < p_{n+1}$

d.h. $y_n = Ax_n$ mit $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$



also: $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n$

außerdem: $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ existiert, da $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$

und $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2^n} = r$

$\Rightarrow x \in \mathcal{U}_r(0)$

A stetig $\Rightarrow Ax = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n = y$

$\Rightarrow y \in A(\mathcal{U}_r(0))$ $\square$

<u>6.4. Korollar (Satz von der inversen Abbildung)</u>: Seien X, Y Banachräume und $A: X \to Y$ eine beschränkte lineare Bijektion. Dann ist $A^{-1}: Y \to X$ auch beschränkt.

<u>Beweis</u>: A Bijektion $\Rightarrow$ A^{-1} existiert

$6.3. \Rightarrow$ A offen $\Leftrightarrow$ A^{-1} stetig $\square$

<u>6.5. Bem.</u>: Eine andere Formulierung von 6.4. lautet: Jede stetige lineare Bijektion zwischen Banachräumen ist ein Isomorphismus.

$(\|Ax\| \leq d\|x\| \ \forall x \in X, A$ bijektiv $\Rightarrow \exists c > 0: \|Ax\| \geq c\|x\| \ \forall x \in X)$

<u>6.6. Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit</u>: Sei X ein Banachraum und Y normierter Raum. Sei $\mathcal{A} \subseteq B(X, Y)$ so daß gilt: $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\| < \infty \quad \forall x \in X$.

Dann gilt auch:

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$$

<u>Beweis</u>: Sei $B_n := \{x \in X \mid \|Ax\| \leq n \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$

Vor. $\Rightarrow$ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$\overset{\text{Baire}}{\underset{6.1.}{\Longrightarrow}} \exists k: \mathring{B}_k \neq \emptyset$, d.h. $\exists x \in X, \varepsilon > 0: \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset B_k$

Wir zeigen: $\mathcal{U}_\varepsilon(0) \subset B_k$

beachte: - $y \in B_k \Rightarrow -y \in B_k$

- $\left.\begin{matrix} y_1, y_2 \in B_k \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t y_1 + (1-t) y_2 \in B_k$ (B_k konvex)

(da $\|A(t y_1 + (1-t) y_2)\| \le t \underbrace{\|A y_1\|}_{\le n} + (1-t) \underbrace{\|A y_2\|}_{\le n} \le n$)

Somit: $\mathcal{U}_\varepsilon(-x) = -\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset B_k$

also: $\mathcal{U}_\varepsilon(0) \subset \frac{1}{2} \mathcal{U}_\varepsilon(x) + \frac{1}{2} \mathcal{U}_\varepsilon(-x)$ $\quad \Big(\underset{\mathcal{U}_\varepsilon(0)}{\underset{\cap}{y}} = \frac{1}{2}\underbrace{(y+x)}_{\in \mathcal{U}_\varepsilon(x)} + \frac{1}{2}\underbrace{(y-x)}_{\in \mathcal{U}_\varepsilon(-x)}\Big)$

$$\subset \frac{1}{2} B_k + \frac{1}{2} B_k$$

$$\subset B_k$$

also: $\mathcal{U}_\varepsilon(0) \subset B_k$, d.h.

$$\|x\| \le \varepsilon \Rightarrow \|Ax\| \le k \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \|A\| = \sup_{\|x\| = \varepsilon} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \frac{k}{\varepsilon} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| \le \frac{k}{\varepsilon} < \infty$$

$\square$

6.7. Korollar (Satz von Banach-Steinhaus): Seien X, Y Banachräume und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B(X,Y)$, die punktweise konvergiert, d.h.

$\forall x \in X \;\; \exists y \in Y \; : \|A_n x - y\| \to 0.$

Definiere den Operator A durch

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x \qquad (x \in X).$$

Dann ist $A \in B(X,Y)$ beschränkt und es gilt

$$\|A\| \leq \sup_n \|A_n\| < \infty$$

Beweis: (Linearität von A klar)

Sei $x \in X \overset{\text{Vor}}{\Rightarrow} (A_n x)$ konv.

$\Rightarrow \exists M : \quad \|A_n x\| \leq M \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\overset{6.6}{\Rightarrow} S := \sup_n \|A_n\| < \infty$

Sei $x \in X$, $\|x\| \leq 1$

Dann: $\|Ax\| \leq \underbrace{\|Ax - A_n x\|}_{\underset{n\to\infty}{\to} 0} + \underbrace{\|A_n x\|}_{\leq S}$

$\leq \varepsilon + S \qquad$ für bel. $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq S \quad \Rightarrow \|A\| \leq S = \sup_n \|A_n\|$

$\Rightarrow A \in B(X,Y)$

$\square$