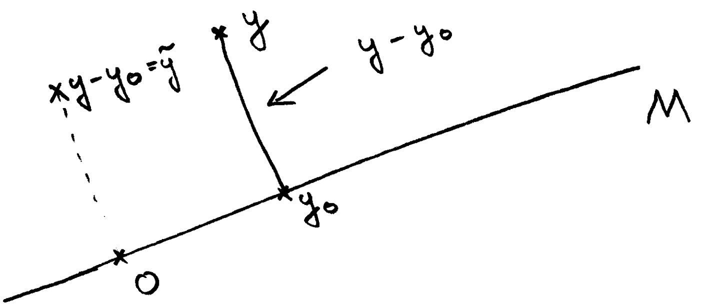
7. Geometrie von Banachräumen

7.1. Lemma: Sei X Banachraum und $M \subsetneq X$ abgeschlossener linearer Teilraum. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x, M) \geq 1 - \varepsilon$.

Beweis: Setze $\delta(y) := \operatorname{dist}(y, M) \quad (y \in X)$.



Sei $y \in X \setminus M$ beliebig $\Rightarrow \exists\, y_0 \in M$ mit $\delta(y) \leq \|y_0 - y\| \leq (1+\varepsilon)\,\delta(y)$

Setze $\tilde{y} := y - y_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \delta(\tilde{y}) = \inf_{z \in M} \|\tilde{y} - z\| = \inf_{z \in M} \|\underbrace{y - y_0 - z}_{\substack{y - \tilde{z} \\ (\tilde{z} \in M)}}\| = \delta(y)$$

$$\Rightarrow (1+\varepsilon)\,\delta(\tilde{y}) \geq \|y_0 - y\| = \|\tilde{y}\|$$

Setze nun $x := \dfrac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|} \quad \Rightarrow \|x\| = 1$

und
$$\|z - x\| = \left\|z - \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|}\right\| = \frac{1}{\|\tilde{y}\|} \underbrace{\|\underbrace{z\|\tilde{y}\|}_{\in M} - \tilde{y}\|}_{\substack{\geq\, \delta(\tilde{y}) \\ \geq\, \frac{\|\tilde{y}\|}{1+\varepsilon}}} \geq \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon \qquad \forall z \in M$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, M) \geq 1 - \varepsilon$$

$\square$

7.2. Satz: Sei X ein Banachraum und

$K_1(X) := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$

die abgeschlossene Einheitskugel in X.

Dann sind äquivalent:

a) X ist endlich-dimensionaler VR.

b) $K_1(X)$ ist kompakt.

Beweis: a) $\Rightarrow$ b) $\dim X < \infty \Rightarrow$ alle Normen äquivalent

$\Rightarrow X \mathrel{\hat{=}} (\mathbb{C}^n, |\cdot|)$

Da $K_1(X)$ abg. und beschränkt $\xRightarrow[\text{Borel}]{\text{Heine-}}$ $K_1(X)$ kompakt

b) $\Rightarrow$ a) Wähle sukzessiv Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit

$\|x_n\| = 1 \quad \forall n$

$\mathrm{dist}(x_n, \mathrm{span}(x_1, \ldots, x_{n-1})) \geq \frac{1}{2}$

(möglich nach 7.1.)

$\Rightarrow$ $(x_n) \subset K_1(X)$, aber ohne konvergente Teilfolge, da

$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \neq m$

$\square$

<u>7.3. Def.</u>: 1) Sei X ein Banachraum und $M, N \subset X$ Unter-Banachräume (d.h. abgeschl., lineare Teilräume).

M und N heißen <u>komplementär</u>, falls

$$M \cap N = \{0\} \quad \text{und} \quad M + N = X$$

$$M + N = \{x + y \mid x \in M, y \in N\}.$$

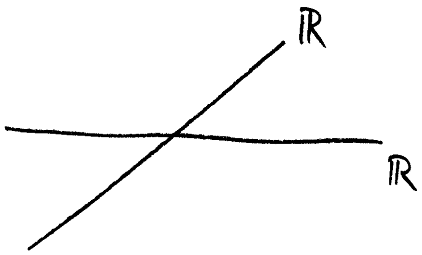
Wir schreiben dann: $X = M \oplus N$

2) Ein Unter-Banachraum $M \subset X$ heißt <u>komplementiert</u>, falls es Unter-Banachraum $N \subset X$ gibt mit:

$$X = M \oplus N.$$

<u>7.4. Bem.</u>: 1) komplementärer Raum ist nicht eindeutig, z.B.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$



2) Falls $X = \mathcal{H}$ Hilbertraum $\Rightarrow$ Jeder Unterhilbertraum $\mathcal{H}_0$ ist komplementiert: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$

3) $X \neq HR \Rightarrow \exists$ unkomplementierte Unterräume i.a.

z.B. c_0 nicht komplementiert in ℓ_∞ (Phillips 1940)

4) Es gilt sogar (Lindenstrauss 1971):
+ Tzafriri

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ Banachraum} \\ \text{jeder Teilraum komplementiert} \end{array}\right\} \Rightarrow X \cong \text{Hilbertraum}$$