8. Adjungierte von Operatoren auf Banachräumen

8.1. Motivation: Für HR $\mathcal{H}$ haben wir für $A \in B(\mathcal{H})$ ein Adjungiertes $A^* \in B(\mathcal{H})$ definiert durch

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^* x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Gilt es Entsprechung dazu für Banachräume X?

Wir haben als Verallgemeinerung von Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ die Dualität

$$X \leftrightarrow X^*$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \to \mathbb{C}$$

$$\langle x, x^* \rangle = x^*(x) \quad \text{für } x \in X, \; x^* \in X^*$$

Sei also $A \in B(X)$, $A : X \to X$

Dann suchen wir A^* mit

$$\langle Ax, x^* \rangle \overset{!}{=} \langle x, A^* x^* \rangle \quad \forall x \in X, \; x^* \in X^*$$

also: $A^* : X^* \to X^*$

<u>8.2. Satz</u>: Sei X ein Banachraum und $A \in B(X)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Operator $A^* \in B(X^*)$, so dass gilt:

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle \quad \forall x \in X, \; x^* \in X^*$$

<u>8.3. Def.</u>: A^* heißt die Adjungierte von A.

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit: Sei $\forall x \in X, x^* \in X^*$

$$\langle x, A_1 x^* \rangle = \langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A_2 x^* \rangle$$

d.h. $\langle x, (A_1 - A_2) x^* \rangle = 0 \quad \forall x \in X$

d.h. $[(A_1 - A_2) x^*](x) = 0 \quad \forall x \in X$

d.h. $(A_1 - A_2) x^* = 0 \quad \forall x^* \in X^*$

d.h. $A_1 - A_2 = 0$

Existenz: Sei $x^* \in X^*$; definiere $A^* x^*$ durch

$$A^* x^* (x) := x^* (Ax)$$

- Linearität klar

$$\bullet \quad \|A^* x^*\| \overset{5.6.}{=} \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |A^* x^* (x)|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \underbrace{|x^*(Ax)|}_{\leq \|x^*\| \cdot \|Ax\|}$$

$$\leq \|x^*\| \cdot \|A\| \cdot \underbrace{\|x\|}_{=1}$$

$$\leq \|A\| \cdot \|x^*\|$$

$$\Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$$

also $A^* \in B(X^*)$ ⊡

<u>8.4. Bem.:</u> 1) Wie vergleicht sich A mit A^{**}?

$$\begin{array}{cccc} A^{**}: & X^{**} & \longrightarrow & X^{**} \\ & \cup & & \cup \\ & X & & X \end{array}$$

$$X \to X^{**}$$

$$x \mapsto \hat{x} \quad \text{mit} \quad \hat{x}(x^*) = x^*(x)$$

Sei $x \in X$, $x^* \in X^*$; dann

$$\langle A^{**}(x), x^* \rangle = \langle x, A^*(x^*) \rangle = \langle Ax, x^* \rangle$$

$$\Rightarrow A^{**}(x) = A(x) \quad \forall x \in X \quad \text{, d.h. } A^{**}|_X = A$$

2) Beweis von 8 2. $\Rightarrow \|A^*\| \le \|A\|$

also auch $\|A^{**}\| \le \|A^*\|$

und somit

$$\|A\| = \|A^{**}|_X\| \le \|A^{**}\| \le \|A^*\|$$

also: $\|A\| = \|A^*\|$

3) Sei $M \subset X$ linearer Teilraum; setze

$$M^\perp := \{x^* \in X^* \mid x^*(x) = 0 \ \forall x \in M\} \subset X^*$$

Dann gilt analog zum HR-Fall:

$$\ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp$$