9. kompakte Operatoren auf Banachräumen

X sei im Folgenden Banachraum

Falls $\dim X = \infty$, so sind abg. Kugeln nicht kompakt, und auch $\overline{A(\{x \mid \|x\| \leq M\})}$ wird für $A \in B(X)$ i.A. nicht kompakt sein

⇝ dies macht Spektraltheorie von $A \in B(X)$ kompliziert!

⇝ wir betrachten spezielle $T \in B(X)$, die "mehr endlichdimensional" sind

9.1. Def.: Sei $T: X \to X$ lin. Abb.

T heißt kompakt, falls $\overline{\{T(x) \mid \|x\| \leq 1\}}$ kompakt ist, d.h. falls gilt

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notation: $\mathcal{K}(X) := \{T: X \to X \mid T \text{ kompakt}\}$

9.2. Satz: 1) $\mathcal{K}(X) \subset B(X)$

2) $\mathcal{K}(X)$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von $B(X)$

3) $\mathcal{K}(X)$ ist zweiseitiges Ideal in $B(X)$, d.h.

$$\left.\begin{array}{l} A \in B(X) \\ T \in \mathcal{K}(X) \end{array}\right\} \Rightarrow AT, TA \in \mathcal{K}(X)$$

Beweis: Übungsaufgabe!

(für "abgeschlossen" in 2) benutze Diagonalfolgen-Trick) □

9.3. Def.: Ein Operator $T: X \to X$ heißt von endlichem Rang, falls ran T endlich-dimensional ist.

$E(X) := \{T : X \to X \mid T \text{ von endl. Rang}\}$

9.4. Bemerkung: 1) $E(X) \subset \mathcal{K}(X) \subset B(X)$

falls $\dim X = \infty$, sind alle Inklusionen strikt

2) $E(X)$ ist zweiseitiges Ideal in $B(X)$, aber nicht abgeschlossen falls $\dim X = \infty$

3) Somit gilt: $\overline{E(X)} \subset \mathcal{K}(X)$

oft gilt "=" (insbesondere für Hilberträume)

aber nicht immer

(erstes Gegenbeispiel: Enflo 1973

$\overline{E(X)} \neq \mathcal{K}(X)$; Szankowski 1981)

für $X = B(\mathcal{H})$

<u>9.5. Satz</u>: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Dann gilt: $\overline{E(\mathcal{H})} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$

<u>Beweis</u>: z.z.: für $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ gibt

es Folge $(T_n)_n$ mit $T_n \in E(\mathcal{H})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

und $T_n \to T$

Dazu sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB von $\mathcal{H}$

(wir betrachten nur separable $\mathcal{H}$; und

o.E. sei $\dim \mathcal{H} = \infty$, sonst Aussage trivial)

Setze $\mathcal{H}_n := \{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{C} \}$

der von $e_1, \dots, e_n$ aufgespannte

Unterraum

$P_n :=$ orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_n$

Setze $T_n := P_n T \in E(\mathcal{H})$

2.2.: $T_n \to T$

zunächst gilt dies punktweise:

$$x \in \mathcal{H} \Rightarrow \|T_n x - Tx\| \to 0$$

denn: $T_n x = P_n T x$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle Tx, e_k \rangle e_k$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \langle Tx, e_k \rangle e_k$$

$$= Tx \quad \left(\begin{array}{l} \text{nach Satz v. Parseval} \\ \text{vgl. 1.6} \end{array} \right)$$

Kompaktheit von T erlaubt nun Verschärfung von pktweiser zu glm. Konvergenz

$\varepsilon > 0 \overset{T \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} \{T(x) \mid \|x\| \leq 1\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\varepsilon(Tx_j)$

für endlich viele x_j mit $\|x_j\| \leq 1$

denn: $\{U_\varepsilon(Tx) \mid \|x\| \leq 1\}$ ist offene Überdeckung von kompakter Menge $\overline{\{Tx \mid \|x\| \leq 1\}}$

Somit gilt:

$\|x\| \leq 1 \Rightarrow \exists\, x_j : \|Tx - Tx_j\| < \varepsilon$

↑ nur endlich viele

$$\Rightarrow \|Tx - T_n x\| \leq \underbrace{\|Tx - Tx_j\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|Tx_j - T_n x_j\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|T_n x_j - T_n x\|}_{= \|P_n(Tx_j - Tx)\| \leq \|Tx_j - Tx\| < \varepsilon}$$

für n hinr. groß (unabh. von x, da man Abschätzung nur für die endlich vielen x_j braucht)

$< 3\varepsilon$ für n hinr. groß $\forall \|x\| \leq 1$

$\Rightarrow \|T - T_n\| < 3\varepsilon$ — " —

$\Rightarrow T_n \to T$ □

<u>9.6. Satz:</u> Sei $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ und $k \in L^2(\mu \times \mu)$. Dann ist der zu k gehörige Integraloperator

$(Kf)(s) = \int k(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$

ein kompakter Operator. (vgl. 3.5)

<u>Beweis:</u> Wir benutzen (nachrechnen!)

$\left.\begin{array}{l}(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ONB} \\ \text{von } L^2(\mu)\end{array}\right\} \Rightarrow$ $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ ONB von $L^2(\mu\times\mu)$, wobei

$$e_{n,m}(s,t) = e_n(s)\cdot\overline{e_m(t)}$$

also: $k \in L^2(\mu\times\mu) \Rightarrow k = \sum_{n,m=1}^{\infty} \alpha_{nm}\, e_{n,m}$

Setze $k_N := \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm}\, e_{n,m}$

$\Rightarrow \|k - k_N\|_{L^2(\mu\times\mu)} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

Sei K_N Integraloperator zu Kern k_N

$\Rightarrow K - K_N$ hat Kern $k - k_N$

$\overset{3.5}{\Longrightarrow} \|K - K_N\| \leq \|k - k_N\|_{L^2} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

also $K_N \to K$

noch z.z.: K_N hat endlichen Rang

$$(K_N f)(s) = \int k_N(s,t)\, f(t)\, d\mu(t)$$

$$= \sum_{n,m=1}^{N} \alpha_{nm} \int e_n(s)\overline{e_m(t)}\, f(t)\, d\mu(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e_n(s)\cdot\left\{\sum_{m=1}^{N} \alpha_{nm} \langle f, e_m\rangle\right\}$$

$\Rightarrow k_N f \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} \quad \forall f \in L^2(\mu)$

$\Rightarrow k_N \in \mathcal{E}(L^2(\mu)) \quad \forall N$

$\subset \mathcal{K}(L^2(\mu))$

$\Rightarrow k \in \mathcal{K}(L^2(\mu))$ $\square$

9.7. Bem: Man kann Integraloperatoren auch auf andern Funktionenräumen betrachten. Sie sind dann typischerweise immer noch kompakt.

Sei: $X = C[0,1]$ und

$k \in C([0,1] \times [0,1])$.

Definiere Integraloperator $k : C[0,1] \to C[0,1]$ durch

$$(kf)(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$$

Dann ist k kompakter Operator,

d.h. $k \in \mathcal{K}(X)$

Beweis: Übungsaufgabe

<u>9.8 Satz von Schauder:</u> Sei $T \in B(X)$

Dann sind äquivalent:

(a) $T: X \to X$ ist kompakt

(b) $T^*: X^* \to X^*$ ist kompakt

<u>Beweis:</u> 1) Falls $X = \mathcal{H}$ Hilbertraum, ist Beweis einfach

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$\Rightarrow \exists T_n \in E(\mathcal{H}): T_n \to T$

$\Rightarrow T_n^* \to T^*$ (da $\|T_n^* - T^*\| = \|T_n - T\| \to 0$)

und $T_n^* \in E(\mathcal{H})$

(denn: $T_n = P_n T_n$, wobei P_n Proj. auf $T_n(\mathcal{H})$

$\Rightarrow T_n^* = T_n^* P_n^* = T_n^* P_n \in E(\mathcal{H})$)

$\Rightarrow T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

(b) $\Rightarrow$ (a): Ersetze T durch T^*

2) für allgemeinen Banachraum ist Beweis komplizierter, man braucht dann Arzela-Ascoli

wir verzichten hier auf den Beweis