Berechnung der Werte $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$

1. Motivation

Die Riemann'sche Zetafunktion mit der Reihendarstellung $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ ist eine der wichtigsten speziellen Funktionen. Über die Zahlen $\zeta(2k+1)$ ist wenig bekannt, aber für die Werte $\zeta(2k)$ gibt es eine geschlossene Formel. Um diese herzuleiten, benötigen wir die Partialbruchzerlegung des Cotangens Hyperbolicus sowie die Definition der Bernoulli-Zahlen.

2. Partialbruchzerlegung des Cotangens Hyperbolicus

2.1. Fourierreihe zu $\cosh(\alpha t)$ mit $\alpha\in\mathbb{C}\setminus i\mathbb{Z}$

Zur Erinnerung: Für die trigonometrische Fourierreihendarstellung gilt

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \quad ,n\in\mathbb{Z}.$$

Nun betrachte man die Funktion

$$f(t)=\cosh(\alpha t) \quad ,t\in[-\pi,\pi].$$

Da f gerade ist, gilt $b_n=0 \quad \forall n$ und damit

$$\begin{aligned} a_o&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(\alpha t)\,dt \\ &=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cosh(\alpha t)\,dt \\ &=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t)\right]_0^{\pi} \quad ,\alpha\neq 0 \\ &=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\pi)-\frac{1}{\alpha}\sinh(0)\right) \\ &=\frac{2}{\alpha\pi}\sinh(\alpha\pi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(\alpha t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(i\alpha t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(i\alpha t)\cos(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos(i\alpha t)\cos(nt)+\sin(i\alpha t)\sin(nt)-\sin(i\alpha t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(i\alpha t+nt)+\cos(i\alpha t-nt)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(i\alpha t+nt)}{i\alpha+n}+\frac{\sin(i\alpha t-nt)}{i\alpha-n}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(i\alpha\pi+n\pi)}{i\alpha+n}+\frac{\sin(i\alpha\pi-n\pi)}{i\alpha-n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(i\alpha\pi+n\pi)(i\alpha-n)+\sin(i\alpha\pi-n\pi)(i\alpha+n)}{-\alpha^2-n^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(\sin(i\alpha\pi)\cos(n\pi)+\cos(i\alpha\pi)\sin(n\pi))(i\alpha-n)+(\sin(i\alpha\pi)\cos(n\pi)-\cos(i\alpha\pi)\sin(n\pi))(i\alpha+n)}{-\alpha^2-n^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\mathrm{i}\alpha\sin(i\alpha\pi)\cos(n\pi)-2n\cos(i\alpha\pi)\sin(n\pi)}{-\alpha^2-n^2}\right).
\end{aligned}$$

Mit $\sin(n\pi)=0$ und $\cos(n\pi)=(-1)^n$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2i\alpha(-1)^n\sin(i\alpha\pi)}{\alpha^2+n^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\alpha(-1)^n\sinh(\alpha\pi)}{\alpha^2+n^2}\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Fourierreihe zu $\cosh(\alpha t)$:

$$f(t)=\cosh(\alpha t)=\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{2\alpha\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\,\frac{\cos(nt)}{\alpha^2+n^2}.$$

2.2. Partialbruchzerlegung des Cotangens Hyperbolicus

Mit

$$\cosh(\alpha t)=\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\cos(nt)\right)$$

gilt für $t:=\pi$

$$\cosh(\alpha\pi)=\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\cos(n\pi)\right)$$

und mit $\cos(n\pi)=(-1)^n$ gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha\pi)&=\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}(-1)^n\right)\\&=\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right)\\\Leftrightarrow\pi\frac{\cosh(\alpha\pi)}{\sinh(\alpha\pi)}&=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\\\Leftrightarrow\pi\coth(\alpha\pi)&=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\quad\forall\alpha\neq0.\end{aligned}$$

3. Definition der Bernoulli-Zahlen

Man betrachte die durch $f(0):=1$ und

$$f(z):=\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\dots}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}$$

definierte Funktion. Diese kann in einer gewissen Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k.$$

Die Koeffizienten B_k heißen Bernoulli-Zahlen (nach Jakob Bernoulli (1654-1705)).

Aus der für alle hinreichend kleinen $|z|$ gültigen Identität

$$(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n) = 1$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich

$$B_0 = 1, \ \frac{1}{2} B_0 + B_1 = 0 \ \ also \ \ B_1 = -\frac{1}{2}$$

und durch Vergleich der Koeffizienten von z^{k-1} die Rekursionsformel

$$\frac{B_0}{k!} + \frac{B_1}{1!(k-1)!} + \frac{B_2}{2!(k-2)!} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{(k-1)!\,1!} = 0.$$

Danach sind alle B_k rational und man erhält für die ersten Bernoulli-Zahlen

$$B_0 = 1, \ B_1 = -\frac{1}{2}, \ B_2 = \frac{1}{6,} \ B_3 = 0, \ B_4 = -\frac{1}{30}, \ B_5 = 0,$$
$$B_6 = \frac{1}{42}, \ B_7 = 0, \ B_8 = -\frac{1}{30}, \ B_9 = 0, \ B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$$

Hieraus vermutet man, dass die Bernoulli-Zahlen $B_{2k+1} \ \forall k \geq 1$ verschwinden.
Dies ergibt sich in der Tat daraus, dass

$$\begin{aligned}
\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} &= \frac{2\mathrm{z} + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} \\
&= \frac{z}{2} \frac{2 + e^z - 1}{e^z - 1} \\
&= \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} \\
&= \frac{z}{2} \frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}} \\
&= \frac{z}{2} \frac{\cosh(\frac{z}{2})}{\sinh(\frac{z}{2})} = \frac{z}{2} \coth(\frac{z}{2})
\end{aligned}$$

eine gerade Funktion ist, weshalb alle Koeffizienten von ungeraden Potenzen verschwinden müssen.

Weiterhin führt diese Identität für hinreichend kleine $|z|$ zu der Darstellung

$$\frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , z\neq 0.$$

4. Berechnung der Werte $\zeta(2k)$ durch Koeffizientenvergleich

Aus der Partialbruchzerlegung des Cotangens Hyperbolicus

$$\pi\coth(\alpha\pi)=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} \quad \forall\,\alpha\neq 0$$

folgt für $\alpha\pi:=\frac{t}{2}$

$$\coth\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{2}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4t}{t^2+(2n\pi)^2} \quad \forall\, t\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{t}{2}\coth\left(\frac{t}{2}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t^2}{t^2+(2n\pi)^2} \quad \forall\, t.$$

Nach Kapitel 3 gilt nun für hinreichend kleine $|t|$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t^2}{t^2+(2n\pi)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}-B_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t^2}{t^2+(2n\pi)^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{2n\pi}{t}\right)^2}$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^2-1}{1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^2}$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^2}-1\,.$$

Für kleine $|t|$ erhält man mit Hilfe der geometrischen Reihe die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k} &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2k}-1\right)\\ &= -2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2k}\\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{t}{2n\pi}\right)^{2k}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Cauchy'schen Doppelreihensatzes gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k}=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{2k}}\right)t^{2k}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!}=2(-1)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n\pi)^{2k}}$$

oder also die geschlossene Formel für $\zeta(2k)$:

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=(-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}.$$

Hiernach ist

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}.$$

Die Formel für $\zeta(2k)$ stammt von Euler (1734) und zählt heutzutage zu seinen schönsten Entdeckungen.