Approximation durch Faltung mit Dirac-Folgen

1. Überblick:

- Motivation: Approximation von Funktionen
- Dirac-Folgen: Definition und Beispiele
- Approximationssatz
- Literaturangabe

2. Motivation:

Jede konvergente Folge von Funktionen konvergiert gegen eine stetige Grenzfunktion. Eine sowohl für die Theorie, als auch für Anwendungen wichtige Fragestellung ergibt sich nun, wenn man versucht eine gegebene Funktion durch eine Folge von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften, den sogenannten Dirac-Folgen zu approximieren.

In diesem Vortrag wird ein Verfahren vorgestellt, dass in sehr allgemeinen Fällen zur Approximation durch „glattere“ Funktionen verwendet werden kann. Dieses wurde in einer Arbeit von Kurt Otto Friedrichs (1901 - 1982) über Differentialoperatoren eingeführt und wird als Regularisierung bezeichnet.

3.Faltung:

Die Faltung beschreibt in der Funktionalanalysis einen mathematischen Operator (mathematische Vorschrift, durch die man aus Objekten neue Objekte bilden kann), der zu zwei Funktionen f, g eine dritte Funktion, im Zeichen „$f * g$“ liefert. Wir führen die Faltung als Integral über $\mathbb{R}$ ein. Um die benötigte Konvergenz zu sichern setzten wir voraus, dass mindestens eine der beiden Funktionen einen kompakten Träger hat.

Man sagt, eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ hat einen kompakten Träger, falls ein kompaktes Intervall $[-a, a]$ existiert, außerhalb dessen f Null ist. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx := \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$

Beispiel: f(x) = $\begin{cases} \cos x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & sonst \end{cases}$

Dann ist $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kompakter Träger von f und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx \;=\; sin(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; sin(\frac{\pi}{2}) - sin(-\frac{\pi}{2}) \;=\; 2$$

Definition: Seien f, g Regelfunktionen auf ℝ , eine der beiden habe einen kompakten Träger. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert dann das Integral

$$\boxed{(f * g)\,(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt}$$

Die durch $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definierte Funktion heißt Faltung von f und g.

Für das Faltungsprodukt gilt:
(i) $f * g$ ist bilinear, d.h. bei festgehaltenem g ist $f \mapsto f * g$ und bei festgehaltenem f ist $g \mapsto f * g$ linear.
(ii) Das Faltungsprodukt ist kommutativ, d.h. $f * g = g * f$
Beweis: (i) z.z.: $f \mapsto f * g$ ist linear.
Seien dazu f, g, h Regelfunktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ((\alpha f + \beta h) * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta h)(t) \cdot g(x-t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha f(t)g(x-t) + \beta h(t)g(x-t)\, dt \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\, dt + \beta \int_{\mathbb{R}} h(t)g(x-t)\, dt \\ &= \alpha\,(f * g)(x) + \beta\,(h * g)(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f \mapsto f * g$ ist linear
Der Beweis zu $g \mapsto f * g$ funktioniert analog.

(ii) z.z.: $(f * g)\,(x) = (g * f)\,(x)$

f oder g habe einen kompakten Träger $[-a, a]$. Dann gilt:

$$(f * g)(x) = \int_{-a}^{a} f(x) g(x-t)\, dt$$

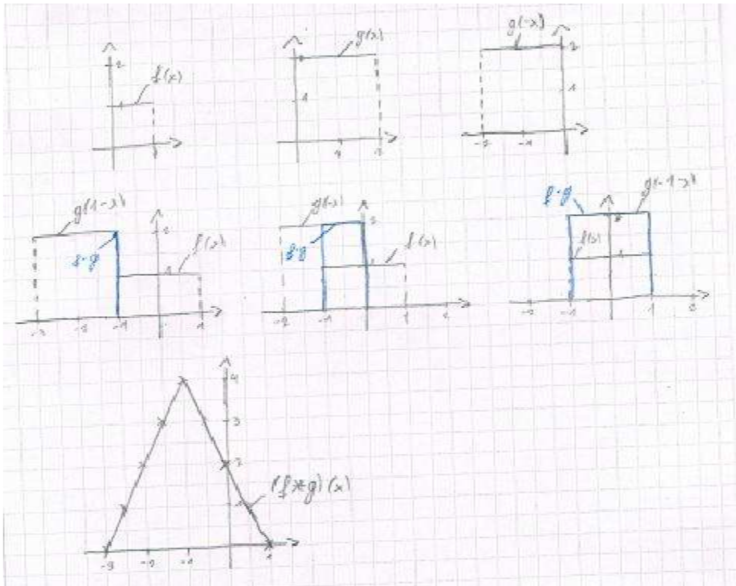
Substitution: $\tau := x - t$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(t)\, g(x-t)\, dt = -\int_{x+a}^{x-a} f(x-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{x-a}^{x+a} f(x-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$$

$$= (g * f)(x) \quad \blacksquare$$

<u>Beispiele:</u> (i) $f(x) = \begin{cases} 1 & {\scriptstyle -1 \le x \le 1} \\ 0 & {\scriptstyle sonst} \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 2 & {\scriptstyle 0 \le x \le 2} \\ 0 & {\scriptstyle sonst} \end{cases}$



(ii) Für r>0 sei $g_r := \frac{1}{2r} \cdot 1_{[-r,r]}$. Für jede Regelfunktion f auf $\mathbb{R}$ ist dann

$$f * g(x) = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t)\, dt.$$

$f * g_r(x)$ wird auch als Mittelwert von f im Intervall [x-r, x+r] bezeichnet und ist glatter als die Funktion f. Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung ist f eine C^{k+1} – Funktion, falls f eine C^k - Funktion ist.

Die Faltung besitzt zudem noch einige Anwendungen in der Physik. So lässt sich zum Beispiel das Potential einer auf einem Intervall von [a, b] verteilten Masse mit Hilfe des Faltungsproduktes bestimmen.

<u>4.Dirac-Folgen:</u>

In dem zu Beginn angekündigten Verfahren konstruiert man die zu approximierende Funktion durch Faltung mit den Funktionen einer sogenannten Dirac-Folge.

Im folgendem werden Dirac-Folgen nur als Hilfsmittel gebraucht. Ihre eigentliche Bedeutung tritt erst bei der Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) von Laurent Schwarz auf.

<u>Definition:</u> Eine Folge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt <u>Dirac-Folge</u>, falls gilt:

$(D1)\ \forall k \in \mathbb{N}: \delta_k \geq 0$

$(D2)\ \forall k \in \mathbb{N}: \int_{\mathbb{R}} \delta_k(t)\, dt = 1$

$(D3)\ \forall \varepsilon > 0, r > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N: \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\, dt < \varepsilon, \quad \left| \int\limits_{[-r,\ r]} \delta_k(t)\, dt - 1 \right| < \varepsilon$

<u>Beispiele:</u> (i) Die Funktionenfolge $\delta_K := \frac{k}{2} \cdot 1_{I_k}$, mit $I_k := [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}],\ k \in \mathbb{N}$ ist eine Dirac-Folge:

$(D1)\ \forall k \in \mathbb{N}: \delta_k \geq 0$ (klar, da $k \in \mathbb{N}$ ist)

$(D2) \int_{\mathbb{R}} \delta_k(t)\, dt = \int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \frac{k}{2}\, dt = \frac{k}{2}\, t \,\Big|_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{k}{2} \cdot (-\frac{1}{k}) = 1$

$(D3)$ Seien $\varepsilon > 0,\ r > 0$ beliebig $\Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N : \frac{1}{k} < r$ (nach archimedischem Axiom)

$\Rightarrow I_k = [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \subset [-r, r]$. Also gilt:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-r} \delta_k(t)\,dt + \int_{r}^{\infty} \delta_k(t)\,dt = 0 + 0 = 0 < \varepsilon$$

$$\left| \int_{[-r,r]} \delta_k(t)\,dt - 1 \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \delta_k(t)\,dt - 1 \right| = |1-1| = 0 < \varepsilon$$

(ii) Die Folge der Landau-Kerne $L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$:

$$L_k(t) := \frac{1}{c_k}(1-t^2)^k \cdot 1_{[-1,1]}, \qquad wobei\ c_k := \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k dt :$$

$(D1)$ $L_k(t) \geq 0$ (da $t \in [-1,1]$)

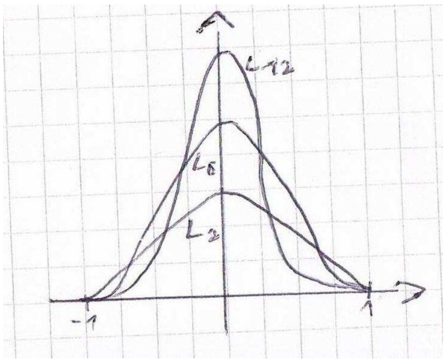
$(D2)$ $\int_{\mathbb{R}} L_k(t)\,dt = \int_{-1}^{1} L_k(t)\,dt = \frac{1}{c_k}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^k dt = \frac{1}{c_k} \cdot c_k = 1$

$(D3)$ $Wegen\ c_k \geq 2\int_{0}^{1}(1-t)^k\,dt = \frac{2}{k+1}$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} L_k(t)\,dt \leq \frac{2}{c_k}\int_{r}^{1}(1-t^2)^k dt \leq (k+1)(1-r^2)^k$$

Skizze zu Landau-Kerne:



<u>5.Approximationssatz:</u>

Sei f: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte stetige Funktion und $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Dirac-Folge. f oder alle (δ_k) mögen einen kompakten Träger haben. Für $f_k := f * \delta_k$ gilt dann:

1. (f_k) konvergiert überall punktweise gegen f.

2. Ist f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, so konvergiert (f_k) gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ gegen f.

<u>Beweis:</u> 1. Wegen $(D2)$ ist

$$f(x) = f(x) \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \delta_k(t)\, dt}_{=1} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta_k(t)\, dt \ .Dann\ gilt:$$

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &= |(f * \delta_k)(\mathrm{x}) - f(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \delta_k(x-t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta_k(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \delta_k(t)\, f(x-t)\, dt - \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta_k(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\, \delta_k(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f(x-t) - f(x))|\, \delta_k(t)\, dt \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle ein $r > 0$, so dass für $|t| < r$ gilt: $\left|f(x-t) - f(x)\right| \leq \varepsilon$.

Wähle nun zu ε, r ein $N(\varepsilon, r)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\, dt < \varepsilon \quad (D3)\ \forall k \geq N.$$

Dann gilt für $\forall k \geq N$ weiter:

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x))| \; \delta_k(t)\, dt$$

$$\leq \varepsilon \int_{[-r,\ r]} \delta_k(t)\, dt + 2\,\|f\| \int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} \delta_k(t)\, dt \leq \varepsilon\,(1 + 2\|f\|)$$

Also gilt die erste Behauptung.

2. Wenn f gleichmäßig stetig ist, kann die Zahl r, und somit der Index $N(\varepsilon, r)$ unabhängig von x gewählt werden. Damit ist die letzte Abschätzung unabhängig von x und (f_k) ist somit gleichmäßig konvergent gegen f.■

6. Literaturangabe:

Konrad, Königsberger: Analysis 1. 2004