Abelsche Summierbarkeit

Vortrag zum Seminar Einführung in die Theorie der Fourierreihen SS 11

Eva Spreuer (2518698)

§ 6 Abelsche Summierbarkeit von Fourierreihen

Die Abel-Summation ist eine weitere Form der Summation die ihren Ausgang vom Abelschen Grenzwertsatz nimmt.

Der **Abelsche Grenzwertsatz** besagt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{für} \quad r \longrightarrow 1^-$$

Wir wollen die **Abel-Summation** zunächst definieren.

Defintion

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ beliebig. Eine solche Reihe heißt konvergent *im Sinne von Abel* gegen s, falls für alle $r \in [0,1)$ die Reihe

$$A(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

genannt *Abel-Mittel*, konvergiert und

$$\lim_{r \to 1^-} A(r) = s$$

ist.

Ähnlich wie bei dem Cesàro-Mittel wollen wir nun einen Zusammenhang zwischen der Fourierreihe und dem Abel-Mittel herleiten. Da wir bei dem Cesàro-Mittel die Möglichkeit haben dieses als Faltung auszudrücken, wünschen wir uns auch etwas Ähnliches bei dem Abel-Mittel. Dafür benötigen wir einen weiteren Kern.

Defintion (Poisson-Kern)

Die Funktion $P(r,t)$, genannt der Poisson-Kern, ist definiert für $t \in [-\pi, \pi]$ und $0 \le r < 1$ durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$P(r,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}.$$

Bemerkung:

Der Poisson-Kern ist in der Tat eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
P(r,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|} e^{int} + r^0 e^{i0t} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-int} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{int} + e^{-int}) + 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n 2\cos(nt) \quad + \quad 1 \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(nt) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nt) - 1
\end{aligned}$$

$\left| r^n e^{int} \right| \le \left| r^n \right| = r^n$

und da $r \in [0,1)$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz folgt nach dem Weierstraß'schem Majorantenkriterium.

Lemma:

Für $t \in [-\pi, \pi]$ und $0 \leq r < 1$ besitzt der Poisson-Kern zudem folgende Darstellungen

$$i) \quad P(r,t) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right)$$

$$ii) \quad P(r,t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

Beweis:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{\text{int}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|} e^{\text{int}} \quad +1+ \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|} e^{\text{int}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-\text{int}} \quad +1+ \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{\text{int}}$$

$$\overbrace{=}^{geom.\,\mathrm{Re}\,ihe} \quad \frac{re^{-it}}{1-re^{-it}} + 1 + \frac{re^{it}}{1-re^{it}}$$

$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right) + 1$$

$$= \operatorname{Re}\left(1 + 2\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{(1+re^{it})(1-re^{-it})}{(1-re^{it})(1-re^{-it})}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-re^{-it}+re^{it}-r^2}{1-re^{-it}-re^{it}+r^2}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$$

Lemma (Eigenschaften des Poisson-Kerns)

$P1)$ $\quad P(r,\cdot)$ ist gerade und positiv

$P2)$ $\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = 1$

$P3)$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists r_0 \in [0,1) \quad \forall r \in [r_0,1)$ gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} P(r,t)dt < \varepsilon$$

Beweis:

$P1)$ $\quad P(r,t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}$

- $1-r^2 > 0, \quad da \quad r \in [0\,,1)$
- $1-2r\cos(t)+r^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 - 2r\cos(t) + r^2$

$= (\cos(t)-r)^2 + \sin(t)^2$

≥ 0

$\Rightarrow \quad P(r,t) \geq o$

Weiter ist $P(r,t)$ gerade, denn es gilt:

$$P(r,-t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-\text{int}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|}e^{-\text{int}} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}e^{-\text{int}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}e^{\text{int}} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{\text{int}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{\text{int}} = P(r,t)$$

$$P2)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{\text{int}}dt \overbrace{=}^{gl.konv.} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}dt \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2\pi} r^0 \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt}_{=1} \quad + \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{int}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|}\frac{1}{in}\underbrace{\left(e^{in\pi}-e^{in\pi}\right)}_{=0} \quad +1+ \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}\frac{1}{in}\underbrace{\left(e^{in\pi}-e^{in\pi}\right)}_{=0}$$

$$= \quad 1$$

$$P3)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} P(r,t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1-r^2}{(1-r\cos(t))^2 + r^2\sin^2(x)}dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1-r^2}{(1-r\cos(t))^2}dt$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{(1-r\cos(\delta))^2}dt$$

$$= \frac{1-r^2}{(1-r\cos(\delta))^2} \quad \xrightarrow{glm.} 0 \quad \text{für} \quad r\uparrow 1$$

□

Definiton

Nun können wir das *Abel-Mittel* definieren als

$$A(r,f):=f*P(r,\cdot)$$

Lemma:

$$A(r,f)(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}\hat{f}(n)e^{\text{int}}$$

Beweis:

$$A(r,f)(t)=f*P(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,t-s)f(s)ds$$

$$\overset{gl.konv.}{\overbrace{=}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in(t-s)}f(s)ds$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(s)e^{-ins}ds\,r^{|n|}e^{\text{int}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)r^{|n|}e^{\text{int}}$$

□

Satz von Fejér (mit dem Poisson-Kern)

Für jede $2\pi-periodische$ Regelfunktion gilt:

1) An jedem Punkt x konvergiert $A(r,f)(x)$ gegen $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ für $r\to1^-$.

An jeder Stelle x, an der f stetig ist, konvergiert $A(r,f)(x)$ gegen $f(x)$ für $r\to1^-$.

2) Ist f stetig, so konvergiert $A(r,f)$ gleichmäßig gegen f.

Beweis:

1)

$$A(r,f)(x) = f * P(r,t)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P(r,t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)P(r,t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)P(r,t)dt$$

$$\overset{\overbrace{}^{\textit{gerade Funkt}}}{=} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)P(r,t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)P(r,t)dt \qquad (I)$$

Weiter gilt mit (P2):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,t)dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P(r,t) = \frac{1}{2} \qquad (II)$$

Aus (I) und (II) folgt mit $A(x) := \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right)$:

$$A(r,f)(x) - A(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)P(r,t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)P(r,t)dt - A(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)P(r,t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)P(r,t)dt - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P(r,t)}_{\frac{1}{2}} 2A(x)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2A(x)\right)P(r,t)dt$$

Damit folgt:

$$\left|A(r,f)(x)-A(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)+f(x-t)-\underbrace{f(x^-)+f(x^+)}_{=2A}\right)P(r,t)dt\right|$$

$$\leq\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(x-t)-f(x^-)\right|P(r,t)dt}_{=:T_1}+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(x+t)-f(x^+)\right|P(r,t)dt}_{=:T_2}$$

Sei $\varepsilon>0$ und wähle $0<\delta<1$ so, dass $\forall t$ mit $0<t<\delta$ gilt:

$$\left|f(x-t)-f(x^-)\right|<\varepsilon \quad und \quad \left|f(x+t)-f(x^+)\right|<\varepsilon$$

Mit Lemma P3) gilt:

$\exists\, r_0\in[0,1)$ so dass $\forall\, r\in[r_0,1)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]}P(r,t)dt<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\quad\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}P(r,t)dt<\varepsilon$$

T_1 lässt sich abschätzen:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(x-t)-f(x^-)\right|P(r,t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\left|f(x-t)-f(x^-)\right|P(r,t)dt \quad + \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|f(x-t)-f(x^-)\right|P(r,t)dt$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}P(r,t)dt}_{<\frac{1}{2}} \quad + \quad \frac{1}{2\pi}\cdot 2\|f\|_{\infty}\underbrace{\int_{\delta}^{\pi}P(r,t)dt}_{<\varepsilon}$$

$$<\varepsilon\cdot\frac{1}{2}+\varepsilon\frac{1}{2\pi}2\|f\|_{\infty}$$

Ebenso erhält man für T_2 die gleiche Abschätzung.

$$\Rightarrow \quad \left|A(r,f)(x)-A(x)\right|<\varepsilon\left(1+\frac{2}{\pi}\|f\|_{\infty}\right)$$

Falls f stetig gilt:

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)=f(x)$$

2) Sei f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall, nämlich $[-\pi,\pi]$. Somit ist f dort gleichmäßig stetig. Daher können r und δ unabhängig von x gewählt werden.
Damit ist auch die obige Abschätzung unabhängig von x, d.h. $A(r,f)$ ist gleichmäßig konvergent.

□

Satz (Darstellungssatz)

Falls die Fourierreihe einer $2\pi-\textit{periodischen Funktion}\ f$ in einem Punkt konvergiert, so gilt:

$$s\,f(x)=\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

und speziell im Stetigkeitspunkt x gilt dann $s\,f(x)=f(x)$.

Beweis

Sei f eine $2\pi-\textit{periodische}\ \mathrm{Re}\,\textit{gelfunktion}$.

Die Fourierreihe dieser Funktion konvergiert in x.

$\Rightarrow$ nach dem Satz von Fejér, dass

$$A(r,f)(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{\mathrm{int}} \quad \text{gegen} \quad \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} \quad \text{konvergiert.}$$

Aus dem Abelschen Grenzwertsatz folgt, wenn $Sf(x)$ konvergiert, dann konvergiert auch $A(r,f)$ und zwar gegen denselben Grenzwert.

□