Einführung

Eine Funktion mittels trigonometrischer Funktionen darzustellen ist das Ziel bei Fourierreihenentwicklung.
Als Fourierreihe einer periodischen Funktion f, die abschnittsweise stetig ist, bezeichnet man deren Entwicklung in eine Funktionenreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

Allgemeine Form der Fourierreihe einer zwei-π-periodischen, stetigen Funktion:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

1. Koeffizientenbestimmung

1.1

Zunächst möchte ich hier noch eine Variante der Bestimmung der Koeffizienten vorstellen, die im Vortrag nicht behandelt wird!

Um die Koeffizienten a_n und b_n berechnen zu können, benötigen wir die Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen (Vortrag 2)

Diese Relationen (auch genannt Euler-Fourier-Formeln) sind:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi \text{ für } m = n \\ 0 \text{ für } m \neq n \end{cases} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx * \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi \text{ für } m = n \\ 0 \text{ für } m \neq n \end{cases}$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx \, dx = 0$

1.1 Bestimmung von a_0 und a_n

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ ist eine $2\pi -$ periodische Funktion.
Zunächst multipliziert man mit cos(mx) und integriert über $[-\pi, \pi]$.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx + \cos mx * \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos nx + b_n * \sin nx \, dx$

Wegen Linearität des Integrals:

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx \, dx + b_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx \, dx$

1. Fall

Da cos(0) =1, wähle zunächst m=0 und beachte die Orthogonalitätsbedingungen.
Da n bei 1 beginnt und m=0, gilt also der Fall m≠n, somit gilt:

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx \, dx = 0$ und

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx \, dx = 0$$

Also folgt:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx \, dx = \frac{a_0}{2} * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx$

$= \frac{a_0}{2} * [x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2} * 2\,\pi = a_0\,\pi \;\Rightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\,\pi$

Demnach ist

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

Also nach Orthogonalitätsbedingung ist $m = n$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos mx\, dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx\; dx + \; b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx\, dx$

Es gilt auch hier: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx\, dx = 0$

und da $m = n$ gilt:

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx\, dx = \pi$

Daraus folgt:

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \cos nx\; dx + \; b_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx\, dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_m * \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \cos mx\, dx + a_m * \pi = 0 + a_m * \pi$

$\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos mx\, dx = a_m * \pi$

$$\boxed{a_m = a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos nx\; dx}$$

1.2 Bestimmung von b_n

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

Integration über $[-\pi, \pi]$ und Multiplikation mit $\sin(mx)$.

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin mx\; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \sin mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx * \sin mx\; dx + \; b_n *$
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx * \sin nx\, dx$

Für $m > 0$, also $n = m$

Gilt:

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx * \sin nx\, dx = 0$,wegen Orthogonalität
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx * \sin nx\, dx = \pi$

Also:

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin mx\; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \sin mx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_m * \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx * \sin nx\, dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} * \sin mx\, dx + b_m * \pi \;= \frac{a_0}{2} * \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx + b_m * \pi$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin mx\; dx = b_m * \pi$

Daraus folgt:

$$\boxed{b_m = b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin nx\; dx}$$

1.2 Koeffizientenbestimmung ausgehend von der komplexen Fourierreihendarstellung

Motivation:

- Zu verschiedenen 2π- periodischen Funktionen wollen wir die Fourierreihen berechnen

→ dazu müssen zunächst die Koeffizienten a_n und b_n der trigonometrischen Fourierreihe $f(x) = \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ bestimmt werden!

1.2.1 Koeffizientenbestimmung

Frage: Wie hängen die komplexe Fourierreihendarstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ und

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$$

mit a_n, b_n und der trigonometrischen Fourierreihendarstellung zusammen?

Mit der Eulerschen Formel: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt aus

$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) * (\cos(nx) - i\sin(nx))dx$

$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\, dx}_{definiere\ ich\ als\ := \frac{a_n}{2}} - i * \underbrace{\frac{1}{2\pi} * \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\, dx}_{:= \frac{b_n}{2}}$

also: $c_n = \frac{a_n}{2} - i * \frac{b_n}{2}$

Betrachte nun die komplexe Fourierreihe:

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{inx}$

Wieder mit der Eulerschen Formel: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt:

$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx))$

$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(\cos(nx) - i\sin(nx))$

$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx)$

Setze nun $c_n = \frac{a_n}{2} - i * \frac{b_n}{2}$ ein:

$c_n + c_{-n} = \left(\frac{a_n}{2} - i * \frac{b_n}{2}\right) + \left(\frac{a_{-n}}{2} - i * \frac{b_{-n}}{2}\right)$

$= \frac{2a_n}{2} - i * \frac{b_n}{2} + i * \frac{b_n}{2} = a_n$

$c_n - c_{-n} = \left(\frac{a_n}{2} - i * \frac{b_n}{2}\right) - \left(\frac{a_{-n}}{2} - i * \frac{b_{-n}}{2}\right) = -ib_n$

Damit folgt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Somit haben wir also:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin nx \, dx$$

Und insbesondere: $a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

<u>Bemerkung:</u>
Für gerade Funktionen mit f(x)=f(-x) verschwinden stets die b_n, wohingegen bei ungeraden Funktionen mit f(x)=-f(-x) die a_n verschwinden.

<u>Beweis zur Bemerkung:</u>
Voraussetzung: f(x)=f(-x)
$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin nx \, dx$
Substituiere g(t)=-t; dx=-dt und beachte, dass sin eine ungerade Funktion ist, also $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ gilt.

Also:
$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \sin nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) \sin(-nt) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) \sin(nt) \, dt$
$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) \sin(nt) \, dt \;\; *^{[Da\ f(x)=f(-x)]} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt = -b_n$
Also:

$$b_n = -b_n \Leftrightarrow 2b_n = 0 \Rightarrow b_n = 0$$

Demnach fällt b_n bei der Fourierreihenentwicklung für gerade Funktionen weg.

Analog bei ungeraden Funtionen:
Voraussetzung: f(x)=-f(-x) und $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos nx \, dx$
Substituiere wieder mit g(t)=-t und beachte, dass $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ gilt.
$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos nx \, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) * \cos(-nt) \, dt$ (da $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$)
$= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-t) * \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) * \cos(nt) dt$
$\overset{Vor.}{=} -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * \cos(nt) \, dt = -a_n$

Also:

$$\Rightarrow a_n = -a_n \Leftrightarrow 2a_n = 0 \Rightarrow a_n = 0$$

Demnach fällt a_n bei der Fourierreihenentwicklung für ungerade Funktionen weg.

2. Beispiele

Die folgenden Beispiele sind für reelle Fourierreihen. Die behandelten Funktionen sind dabei stets $2\pi -$ periodisch anzunehmen.

2.1 Fourierreihe zur Signumsfunktion (Rechteckschwingung)

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & \mathrm{x} = -\pi, 0, \pi \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Da die Funktion ungerade ist, können wir uns auf die Berechnung der b_n beschränken.
Diese ergibt:

$\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)} * \sin \mathrm{mx\, dx}$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \sin nx\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1 * \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{\mathrm{n}} * \cos(\mathrm{xn})\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos \pi n + \frac{1}{n}\right)$

Bei n ungerade: $b_n = \frac{4}{n\pi}$

Bei n gerade: $b_n = 0$

Da $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{b_n} * \sin \mathrm{nx}$, hat die Signumfunktion als Fourierreihe:

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} * \sin(2n-1)\, x}$$

2.2 Fourierreihe zur Betragsfunktion (Dreiecksschwingung)

f(x)=$|x|$, demnach ist f eine gerade Funktion (f(x)=f(-x)), sodass nur a_n betrachtet werden muss.

$a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\, dx = \pi$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) * \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x * \cos nx\, dx$ (partielle Integration)

$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin(nx)\, x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx) * 1\, dx \right)$

$= \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{n} \sin(nx) - \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_0^{\pi}\right)\right.$

$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) - \frac{1}{n} * \left(-\frac{1}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n}\right)\right)$

$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(\mathrm{n}\pi) - \frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{2}{\pi}\ \left(\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)$

Bei n gerade folgt: $a_n = 0$

Bei n ungerade folgt: $a_n = -\frac{4}{n^2\pi}$

Die Fourierreihe ist also:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cosnx = \frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)*x = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2}}$$

2.3 Fourierreihe zur Quadratsfunktion

$f(x) = x^2$ ist auch wieder eine gerade Funktion, also a_0 und a_n berechnen genügt.

$$a_0=\frac{1}{\pi}*\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\ \left(\frac{1}{3}\pi^3-\left(-\frac{1}{3}\pi^3\right)\right)=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)*\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} x^2*\cos nx\, dx \qquad \text{(partielle Integration)}$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(\left[\frac{1}{n}\sin(nx)*x^2\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)*2x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(0-\frac{2}{n}*\left(\left[-\cos(nx)*\frac{1}{n}*x\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\cos(nx)*1\,dx\right)\right) \qquad [\cos(n\pi)=(-1)^n]$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(-\frac{2}{n}\left(\left(-(-1)^n*\frac{\pi}{n}+(-1)^n*\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right)+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(-\frac{2}{n}*\left(\left(\frac{-2\pi}{n}*(-1)^n\right)+\frac{1}{n}*\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(\frac{4\pi}{n^2}*(-1)^n+0\right)=\frac{4}{n^2}*(-1)^n$$

Daraus ergibt sich die Fourierreihe:

$$\boxed{f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}*cos\,(nx)}$$

2.4 Fourierreihe zur Sägezahnfunktion (Kippschwingung)

Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$ heißt Sägezahnschwingung.

$f(x)=-f(-x)$, also eine ungerade Funktion, sodass die Berechnung von b_n ausreicht.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)*\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} x*\sin nx\, dx \qquad \text{partielle Integration}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}*\ \left[(-\cos(nt))*\frac{1}{n}*x\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}*\int_{-\pi}^{\pi}(-\cos nt)*\frac{1}{n}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}*\left(\frac{\pi}{n}*(-\cos(\pi n))+\frac{\pi}{n}*(-\cos(-\pi n))\right)+0 \qquad [\text{da } cos(\alpha)=\cos(-\alpha)]$$

$$=\frac{1}{n}*(-\cos(\pi n)-\cos(\pi n)) = -\frac{2}{n}*\cos(\pi n) = -\frac{2}{n}*(-1)^n = \frac{2}{n}*(-1)^{n+1}$$

Die Fourierreihe ist damit:

$$f(x) = 2 * \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} * \frac{\sin(nx)}{n}$$

2.5 Spezielle Werte für Betrags- und Quadratsfunktion

(i) Betrachte zunächst die Betragsfunktion: (Das folgende gilt auf Grund des Satzes von Fejér und später mit Satz von Dirichlet)

$f(x) := |x|$

$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2}$

$\Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2} = \left(f(x) - \frac{\pi}{2}\right) * \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2} = \frac{|x|*\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)*x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{|x|*\pi}{4}$

$\Leftrightarrow cosx + \frac{cos3x}{3^2} + \frac{cos5x}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8} - \frac{|x|*\pi}{4} \qquad \text{für } -\pi \leq x \leq \pi$

Für x=0 erhält man dann:

$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

Als Summe geschrieben: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad (**)$

(ii) Betrachte nun die Quadratsfunktion:

$f(x) := x^2$

$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} * cos\,(nx)$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} * \cos(nx) = (f(x) - \frac{\pi^2}{3})/4$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} * \cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$

$\Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} * \cos(nx) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}$

$\Leftrightarrow cosx - \frac{cos2x}{2^2} + \frac{cos3x}{3^2} - \frac{cos4x}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \qquad für -\pi \leq x \leq \pi$

Für x=0 ergibt sich

$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$

Als Summe geschrieben: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

$\Leftrightarrow -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)} + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2}\right] = \frac{\pi^2}{12}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Jetzt $(**)$ eingesetzt:

$\frac{\pi^2}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{3\pi^2}{24} - \frac{2\pi^2}{24}$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24} \quad \Big| \, Faktor\ \frac{1}{4}\ herausziehen$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Summenformel von Euler

Literaturangabe:

- O. Forster, Analysis I, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.
- K. Königsberger, Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- Online unter: http://www.mathe-seiten.de/fourier.pdf von Thomas Peters, zuletzt eingesehen am 10.04.2011.
- H. Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.