UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 30.10.2012, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 20 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$ injektiv. Zeigen Sie, dass dann auch $f(G)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) & \frac{\partial u}{\partial y}(z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z) & \frac{\partial v}{\partial y}(z) \end{pmatrix} = |f'(z)|^2 \qquad \text{für alle } z \in \Omega,$$

wobei wir $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$ setzen. Beweisen Sie damit Satz 1.5 der Vorlesung.

Hinweis: Identifizieren Sie $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und verwenden Sie den aus der Analysis II bekannten Satz von der inversen Abbildung.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ definieren wir auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ die *Koebe-Funktion*

$$k_\vartheta : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{(1 - ze^{i\vartheta})^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von k_ϑ auf $\mathbb{D}$.

(b) Zeigen Sie, dass k_ϑ auf $\mathbb{D}$ schlicht ist.

(c) Zeigen Sie $k_0(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \backslash (-\infty, -\frac{1}{4}]$. Wie sieht $k_\vartheta(\mathbb{D})$ aus?

Hinweis: Untersuchen Sie hierzu das Abbildungsverhalten von

$$\psi_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1+z}{1-z} \qquad \text{und} \qquad \psi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{4}(z^2 - 1)$$

und bestimmen Sie die Komposition $\psi_2 \circ \psi_1$.