UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II
Wintersemester 2012/2013

Blatt 2
Abgabe: Dienstag, 20.11.2012, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 30 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Für $\theta \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Rotation der Koebe-Funktion

$$k_\theta :\ \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{(1 - ze^{i\theta})^2}.$$

(a) Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass für $0 \leq r < 1$ gilt

$$|k_\theta'(re^{-i\theta})| = \frac{1+r}{(1-r)^3} \qquad \text{und} \qquad |k_\theta'(-re^{-i\theta})| = \frac{1-r}{(1+r)^3}$$

sowie

$$|k_\theta(re^{-i\theta})| = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad \text{und} \qquad |k_\theta(-re^{-i\theta})| = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

(b) Stellen Sie mit einem Mathematikprogramm Ihrer Wahl die Bilder der durch

$$|z| = \frac{1}{4}, \qquad |z| = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad |z| = \frac{3}{4}$$

gegebenen Kreislinien unter der Abbildung k_0 dar.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine schlichte Funktion. Wir setzen

$$d_f(z) := \operatorname{dist}\big(f(z), \partial f(\mathbb{D})\big) := \inf_{w \in \partial f(\mathbb{D})} |f(z) - w| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq d_f(z) \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Koebe-Transformierte zu f bezüglich

$$\phi :\ \mathbb{D} \to \mathbb{D},\ z \mapsto \frac{a+z}{1+\overline{a}z}.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (20 Punkte)**.** Gegeben seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit Potenzreihendarstellungen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist g schlicht und gilt $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$, so gilt $|a_1| \leq |b_1|$.

Hinweis: Verwenden Sie das Lemma von Schwarz.

(b) Fordern wir in der Situation von Aufgabenteil (a) zusätzlich, dass die Menge $g(\mathbb{D})$ konvex ist, so gilt $|a_m| \leq |b_1|$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Betrachten Sie für festes $m \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$h : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \ re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f\big(\zeta^k r^{\frac{1}{m}} e^{i\frac{\theta}{m}}\big),$$

wobei wir $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{m})$ setzen. Zeigen Sie, dass h wohldefiniert und holomorph ist, und bestimmen Sie ferner die Potenzreihenentwicklung von h auf $\mathbb{D}$.

(c) Für jede Funktion $g \in \mathcal{S}$ mit konvexem Bild $g(\mathbb{D})$ erfüllen die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von g die Ungleichung $|b_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sind diese Abschätzungen scharf, d.h. gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{S}$ mit konvexem Bild $g(\mathbb{D})$, deren Koeffizienten $|b_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen?