UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II
Wintersemester 2012/2013

Blatt 3
Abgabe: Dienstag, 4.12.2012, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 20 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{S}$, in deren Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}$$

alle Koeffizienten a_n für $n \geq 2$ reell sind.

Mit $\mathcal{R}$ bezeichnen wir darüber hinaus die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, die der Bedingung $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{R}) = f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R}$ genügen.

Ziel dieses Aufgabenblatts ist der Beweis der Bieberbachschen Vermutung für Funktionen aus $\mathcal{S}_\mathbb{R} \subset \mathcal{S}$. Dieser beruht auf dem Nachweis der gewünschten Koeffizientenabschätzungen für Funktionen aus $\mathcal{R}$ und der Beobachtung, dass damit $\mathcal{S}_\mathbb{R}$ als Spezialfall abgedeckt wird.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Es gilt die Inklusion $\mathcal{S}_\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$.

(b) Setzen wir

$$\mathbb{D}_+ := \{z \in \mathbb{D} |\ \operatorname{Im}(z) > 0\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{D}_- := \{z \in \mathbb{D} |\ \operatorname{Im}(z) < 0\},$$

so gilt für alle $f \in \mathcal{R}$

$$\operatorname{Im}(f(z)) > 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{D}_+ \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}(f(z)) < 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{D}_-$$

und damit insbesondere $\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(f(z)) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{Im}(f)$ auf $\mathbb{D}_+$ bzw. $\mathbb{D}_-$ vorzeichentreu ist, und untersuchen Sie danach das Verhalten von $\operatorname{Im}(f(it))$ für t nahe 0.

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $f \in \mathcal{R}$ definieren wir die *Rogosinski-Transformierte*

$$\phi_f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-z^2}{z} f(z), & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass ϕ_f holomorph ist und dass gilt

$$\mathrm{Re}(\phi_f(z)) > 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Bestimmen Sie auch die Potenzreihendarstellung von ϕ_f auf $\mathbb{D}$.

Hinweis: Betrachten Sie für $r \in (0,1)$ die durch $\phi_{f,r}(z) := \frac{1-z^2}{z} r f(rz)$ definierte Funktion $\phi_{f,r} \in \mathcal{O}(D(0, \frac{1}{r}))$ und zeigen Sie $\mathrm{Re}(\phi_{f,r}(e^{i\theta})) \geq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$.
Wenden Sie anschließend das Maximumprinzip (bzw. Minimumprinzip) für holomorphe (bzw. harmonische) Funktionen an und führen Sie den Grenzübergang $r \nearrow 1$ durch.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f \in \mathcal{R}$ mit der Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}$$

gegeben. Beweisen Sie

$$|a_{n+1} - a_{n-1}| \leq 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und folgern Sie damit die Abschätzung

$$|a_n| \leq n \qquad \text{für alle } n \geq 2.$$

Hinweis: Verwenden Sie die in Aufgabe 2 eingeführte Rogosinski-Transformierte ϕ_f von f und nutzen Sie Aufgabe 3 von Blatt 2 aus.