UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II
Wintersemester 2012/2013

Blatt 4
Abgabe: Dienstag, 18.12.2012, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 20 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $R > 0$ und eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\overline{D_R(0)} \subset \Omega$. Zeigen Sie:

(a) Für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{für alle } z \in D_R(0).$$

Hinweis: Fixieren Sie $z \in D_R(0)$ und wenden Sie den Cauchyschen Integralsatz an auf die Funktion

$$h(w) := \frac{\overline{z} f(w)}{R^2 - \overline{z} w}.$$

Nutzen Sie dabei aus, dass gilt

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} + h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} \qquad \text{für alle } |\zeta| = R.$$

(b) Für jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt die *Schwarzsche Integralformel*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R(0)} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{\operatorname{Re}(f(\zeta))}{\zeta}\, d\zeta + i \operatorname{Im}(f(0)) \qquad \text{für alle } z \in D_R(0).$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass gilt $2\operatorname{Re}(f) = f + \overline{f}$ und

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta}.$$

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Mit $\mathcal{P}$ bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit der Eigenschaft $f(0) = 1$ und $\mathrm{Re}(f(z)) > 0$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathcal{P}$ gegeben, dann gibt es für alle $0 < R < 1$ eine stetig differenzierbare Funktion $\rho_R : [0, 2\pi] \to (0, \infty)$ mit

$$\int_0^{2\pi} \rho_R(t)\,dt = 1,$$

so dass gilt

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}\,\rho_R(t)\,dt \qquad \text{für alle } z \in D_R(0).$$

Hinweis: Verwenden Sie die Schwarzsche Integralformel aus Aufgabe 1.

(b) Für $f \in \mathcal{P}$ gelten die Abschätzungen

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \le |f(z)| \le \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und symmetrisch zur reellen Achse, d.h. es gelte $\overline{z} \in \Omega$ für alle $z \in \Omega$. Wir setzen

$$\Omega_+ := \{z \in \Omega |\ \mathrm{Im}(z) > 0\} \qquad \text{und} \qquad \Omega_- := \{z \in \Omega |\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$$

sowie $L := \Omega \cap \mathbb{R}$.

Beweisen Sie das *Schwarzsche Spiegelungsprinzip*: Ist f eine auf Ω_+ holomorphe Funktion, die sich auf $\Omega_+ \cup L$ stetig fortsetzen lässt mit $f(L) \subseteq \mathbb{R}$, so ist durch

$$\tilde{f} : \ \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in \Omega_+ \cup L \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } z \in \Omega_- \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf Ω gegeben.