UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II
Wintersemester 2012/2013

Blatt 5
Abgabe: Dienstag, 15.1.2013, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 20 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Satz 4.6 der Vorlesung:

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Gebieten in $\mathbb{C}$ mit $0 \in G_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für die der Kern

$$G := \ker(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

existiert, und sei $G_* \subseteq G$ offen. Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(G_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt konvergent (d.h. eine Cauchy-Folge bezüglich der kompakten Konvergenz auf G_*), so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G_*)$. Die Grenzfunktion f ist hierbei eindeutig bestimmt.

(b) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt konvergent gegen $f \in \mathcal{O}(G_*)$, so ist $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf G_* kompakt konvergent gegen f'.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\gamma : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ein Jordanscher Kurvenbogen, d.h. γ ist injektiv, stetig und erfüllt $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = \infty$. Wir setzen zudem $0 \notin \gamma([0,\infty))$ voraus und definieren für alle $t \geq 0$

$$\Gamma_t := \gamma([t,\infty)) \qquad \text{und} \qquad G_t := \mathbb{C}\backslash\Gamma_t.$$

Zeigen Sie, dass die Familie der Schlitzgebiete $(G_t)_{t\geq 0}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) Für $0 \leq s < t < \infty$ gilt $G_s \subsetneqq G_t$.

(ii) Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to t \in [0,\infty)$ für $n \to \infty$ gilt

$$G_{t_n} \to G_t \qquad \text{für } n \to \infty.$$

(iii) Für jede Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[0,\infty)$ mit $t_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt

$$G_{t_n} \to \mathbb{C} \qquad \text{für } n \to \infty.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Folgern Sie den folgenden Spezialfall von Satz 4.9 der Vorlesung aus dem Satz von Carathéodory (Satz 4.7):

Sei $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge *einfach zusammenhängender* Gebiete $D_n \subsetneqq \mathbb{C}$ mit $0 \in D_n$, die einen Kern $D \subsetneqq \mathbb{C}$ hat und gegen diesen konvergiert.

Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von schlichten Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(D_n)$ mit

$$f_n(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_n'(0) > 0.$$

Wir setzen $G_n := f_n(D_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann auf D kompakt konvergent gegen eine schlichte Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$, wenn die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Kern $G \subsetneqq \mathbb{C}$ hat und gegen diesen konvergiert.

In diesem Fall gilt $f(D) = G$.

Frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!