UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II

Wintersemester 2012/2013

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 29.1.2013, vor der Vorlesung

Dieses Blatt wird mit 20 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 15 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Gegeben sei eine Löwner-Kette $f \in \mathcal{L}$. Wir definieren

$$g:\ \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C},\ (z,t) \mapsto f_t^{-1}(f_0(z)). \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass f genau dann auf $\mathbb{D} \times [0,\infty)$ einer partiellen Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = z\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \tag{2}$$

mit einer stetigen Funktion $\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{T}$ genügt, wobei wir $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\}$ setzen, wenn g eine Lösung der folgenden Differentialgleichung darstellt:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(z,t) = -g(z,t)\frac{1+\kappa(t)g(z,t)}{1-\kappa(t)g(z,t)} \tag{3}$$

(b) Gegeben sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Löwner-Kette

$$f:\ \mathbb{D} \times [0,\infty) \to \mathbb{C},\ (z,t) \mapsto e^t k_\theta(z) = \frac{e^t z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

aus Beispiel 5.2 der Vorlesung einer Differentialgleichung der Form (2) genügt, und bestimmen Sie die zugehörige Funktion κ.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $\gamma \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$h_\gamma:\ \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{1-2\cos(\gamma)z+z^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt $h_\gamma \in \mathcal{S}$. Welche Funktionen ergeben sich für $\gamma \in \pi\mathbb{Z}$?

bitte wenden

(b) Für $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ gilt $h_\gamma(\mathbb{D}) = \mathbb{C}\backslash(I_\gamma \cup J_\gamma)$ mit

$$I_\gamma := \Big(-\infty, -\frac{1}{2(1+\cos(\gamma))}\Big] \qquad \text{und} \qquad J_\gamma := \Big[\frac{1}{2(1-\cos(\gamma))}, \infty\Big).$$

Hinweis: Betrachten Sie auf $\mathbb{D}^* := \mathbb{D}\backslash\{0\}$ die Funktion

$$\psi : \ \mathbb{D}^* \to \mathbb{C}, \ z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

und zeigen Sie, dass ψ injektiv ist mit $\psi(\mathbb{D}^*) = \mathbb{C}\backslash[-2, 2]$.

Aufgabe 3 (15 Punkte!)**.** Gegeben seien $t \in [0, \infty)$ und $\theta \in (0, \pi)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine Lösung $\gamma \in (0, \pi)$ der Gleichung

$$\frac{e^{-t}}{2(1-\cos(\gamma))} = \frac{1}{2(1-\cos(\theta))}. \tag{4}$$

(b) Für die Lösung $\gamma \in (0, \pi)$ der Gleichung (4) in Aufgabenteil (a) gilt

$$w_t = h_\theta^{-1} \circ (e^{-t} \cdot h_\gamma),$$

wobei wir

$$w : \ \mathbb{D} \times [0, \infty) \to \mathbb{C}, \ (z, t) \mapsto k_0^{-1}(e^{-t} k_0(z))$$

gemäß (1) mit der aus Aufgabe 1 (b) bekannten Löwner-Kette zu k_0 bestimmen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $g := h_\theta^{-1} \circ (e^{-t} \cdot h_\gamma)$ und w_t biholomorphe Abbildungen von $\mathbb{D}$ auf Gebiete $\mathbb{D}\backslash(-1, s]$ bzw. $\mathbb{D}\backslash(-1, \tilde{s}]$ darstellen. (Dabei müssen s und $\tilde{s}$ nicht explizit bestimmt werden!)
Verwenden Sie anschließend das Lemma von Schwarz.

(c) In der Situation von Aufgabenteil (b) gilt

$$h_\gamma(z) = \frac{e^t w_t(z)}{1 - w_t(z)^2}\Big(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \cos(j\theta) w_t(z)^j\Big).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\frac{1-x^2}{1-2\cos(\theta)x + x^2} = \operatorname{Re}\Big(\frac{1+e^{i\theta}x}{1-e^{i\theta}x}\Big) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty}\cos(j\theta)x^j.$$