UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
M.Sc. Tobias Mai

Vorlesung Funktionentheorie II
Wintersemester 2012/2013

Differentialgeometrische Hilfsmittel zu Kapitel 3

Wege im $\mathbb{R}^n$

Im Folgenden nennen wir eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ einen *Weg* im $\mathbb{R}^n$.

Der auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierte Weg $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt

- *geschlossen*, falls die Bedingung $\gamma(a) = \gamma(b)$ erfüllt ist.
- *regulär*, falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Orientierungserhaltende Parametertransformationen

Ist $\phi : I \to J$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen zwei abgeschlossenen Intervallen $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$ mit $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in (a, b)$ sowie $\phi(a) = c$ und $\phi(b) = d$, so nennen wir ϕ eine *orientierungserhaltende Parametertransformation*.
Ist $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, so ist offensichtlich auch $\gamma \circ \phi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

Kurven im $\mathbb{R}^n$

Auf der Menge aller Wege in $\mathbb{R}^n$ führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein: Für zwei Wege $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ schreiben wir $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls es eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\phi : I_2 \to I_1$ gibt, so dass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$ gilt.
Unter einer *Kurve* Γ verstehen wir dann die Äquivalenzklasse eines Weges γ bezüglich $\sim$.
Die Kurve Γ heißt *geschlossen*, falls der Weg γ geschlossen ist.

Parametrisierung nach Bogenlänge

Ein regulärer Weg $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls gilt

$$|\dot{\gamma}(t)| = 1 \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Zu jedem regulären Weg γ existiert eine orientierungserhaltende Parametertransformation $\phi : [0, L] \to I$, so dass $\gamma \circ \phi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Hierbei bezeichnet

$$L := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$$

die Weglänge von γ. Um dies einzusehen, stellt man zunächst fest, dass

$$\psi : \ I \to [0, L], \ t \mapsto \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)|\, d\tau$$

streng monoton wachsend und surjektiv ist, also eine Umkehrfunktion $\psi^{-1} : [0, L] \to I$ besitzt. Anschließend rechnet man nach, dass $\gamma \circ \psi^{-1}$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Krümmung ebener Wege
Wir betrachten nun den Spezialfall $n = 2$ ebener Kurven. Durch die übliche Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ schließt dies auch den Fall von Kurven in $\mathbb{C}$ ein.

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ein nach Bogenlänge parametrisierter C^2-Weg. Dann gilt

$$1 = |\dot\gamma(t)|^2 = \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle \qquad \text{für alle } t \in I$$

und somit

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle = 2\langle \ddot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle \qquad \text{für alle } t \in I.$$

Für alle $t \in I$ steht also der Vektor $\ddot\gamma(t)$ senkrecht auf $\dot\gamma(t)$, d.h. es gibt ein $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ mit

$$\ddot\gamma(t) = \kappa(t)N(t), \qquad \text{für den } \textit{Normalenvektor} \qquad N(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot\gamma(t).$$

Die hierdurch gegebene Abbildung $\kappa : I \to \mathbb{R}$ heißt die *Krümmung (mit Vorzeichen)* des Weges γ.

Die Krümmung $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eines (nicht notwendigerweise nach Bogenlänge parametrisierten) C^2-Weges $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ ist dann gegeben durch $\kappa := \tilde\kappa \circ \phi^{-1}$, wobei $\phi : J \to I$ die orientierungserhaltende Parametertransformation auf die Parametrisierung $\tilde\gamma = \gamma \circ \phi$ nach Bogenlänge und $\tilde\kappa : J \to \mathbb{R}$ die Krümmung von $\tilde\gamma$ bezeichne.

Satz. *Die Krümmung κ eines regulären C^2-Weges*

$$\gamma = (x, y) : \ I \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (x(t), y(t))$$

lässt sich bestimmen durch

$$\kappa(t) = \frac{\dot x(t)\ddot y(t) - \ddot x(t)\dot y(t)}{(\dot x(t)^2 + \dot y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textit{für alle } t \in I.$$

Konvexe Kurven
Eine durch einen regulären C^2-Weg γ parametrisierte Jordankurve Γ umschließt genau dann ein konvexes Gebiet, wenn die Krümmung κ ihr Vorzeichen nicht ändert.

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ein C^2-Weg. Die *Totalkrümmung* $K(\Gamma)$ der durch γ parametrisierten C^2-Kurve Γ ist gegeben (und in der Tat wohldefiniert!) durch

$$K(\Gamma) := \int_a^b |\kappa(t)||\dot\gamma(t)|\, dt$$

Satz. *Für jede geschlossene C^2-Kurve Γ gilt $K(\Gamma) \geq 2\pi$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn Γ eine Jordankurve ist, die ein konvexes Gebiet umschließt.*

Literatur

[1] J.-H. Eschenburg und J. Jost, *Differentialgeometrie und Minimalflächen*, Springer-Verlag, 2007

[2] W. Kühnel, *Differentialgeometrie*, Vieweg & Sohn Verlag, 2008