Kap. 2 Elementare Wachstums- und Verzerrungssätze

2.1. Definition

Auf $\Delta := \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$

betrachten wir die Klassen $\Sigma, \Sigma' \subset \mathcal{O}(\Delta)$,

die gegeben sind durch

$\Sigma :=$ Menge aller schlichten Funktionen $g : \Delta \to \mathbb{C}$ mit einem einfachen Pol in ∞ mit $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \dfrac{g(\zeta)}{\zeta} = 1$.

$\Sigma' :=$ Menge aller Funktionen

$$g : \Delta \to \mathbb{C},\ \zeta \longmapsto \frac{1}{f\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$$

für $f \in \mathcal{S}$.

Offenbar gilt $\Sigma' \subsetneq \Sigma$.

Ferner besitzt jede Funktion $g \in \Sigma$ auf Δ eine Laurententwicklung der Form

$$g(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}.$$

Gilt speziell $g \in \Sigma'$, d.h. $g(\zeta) = \dfrac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$ für $f \in \mathcal{S}$, so ist

$$a_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} b_{n-k} a_k \quad \text{für } f(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

$$a_1 := 1.$$

2.2. Erinnerung

Eine Kurve Γ mit stetiger Parametrisierung

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt <u>Jordan-Kurve</u>, falls es eine injektive (und stetige) Abbildung

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \mathbb{T} := \partial \mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

gibt mit $\quad \gamma(t) = \tilde{\gamma}(e^{2\pi i t})$ für $t \in [0,1]$.

<u>Jordanscher Kurvensatz</u>

Ist Γ eine Jordan-Kurve, so besitzt $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ genau zwei Zusammenhangskomponenten $G_0, G_1 \subset \mathbb{C}$ mit $\partial G_0 = \partial G_1 = \Gamma$, G_0 beschränkt.

Ist γ sogar stetig differenzierbar und ist $f \in C^1(\Omega)$ für $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\overline{G_0} \subset \Omega$, so besagt der <u>Satz von Green</u>

Orientierung von γ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

$$\pm \int_\gamma f(z)\, dz = 2i \int_{G_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, d\lambda^2(z)$$

Speziell für $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$ erhalten wir

$$\pm \lambda^2(G_0) = \frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\, \dot{\gamma}(t)\, dt =: \mathcal{F}(\gamma).$$

Anhang zu Erinnerung 2.2.: Orientierter Flächeninhalt

Aus der Analysis I ist (eventuell) bekannt:

Satz (Leibnizsche Sektorformel)

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann überstreicht der Fahrstrahl an diese den orientierten Flächeninhalt

$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,dt,$$

wobei $\gamma = (x,y)$.

(vgl. Satz 12.5.4 in Königsberger, Analysis I)

Ist nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve, so gilt:

$$\gamma = x + iy, \quad \dot{\gamma} = \dot{x} + i\dot{y}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \bar{\gamma}\dot{\gamma} &= (x - iy)(\dot{x} + i\dot{y}) \\
&= (x\dot{x} + y\dot{y}) + i(x\dot{y} - y\dot{x}) \\
&= \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) + i(x\dot{y} - y\dot{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad F(\gamma) &= \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_a^b \bar{\gamma}(t)\,\dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz
\end{aligned}$$

2.3. Satz (Flächensatz von Gronwall)

Sei $g \in \Sigma$ gegeben. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leq 1 .$$

Beweis:

Sei $r > 1$ gegeben. Da g schlicht ist, liefert

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad t \longmapsto g(re^{it})$$

eine glatte Parametrisierung einer Jordan-Kurve Γ_r, die ein Gebiet $G_r \subset \mathbb{C}$ berandet.

Es gilt.
$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_r(t) &= g'(re^{it})\, i r e^{it} \\ &= \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n (re^{it})^{-(n+1)}\right) i r e^{it} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_r(t)}\, \dot{\gamma}_r(t) = {} & \left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} (re^{-it})^{-n}\right) \\ & \left(1 - \sum_{m=1}^{\infty} m\, b_m (re^{it})^{-(m+1)}\right) i r e^{it} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & i r^2 + i \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n} \frac{1}{r^{n-1}} e^{i(n+1)t} \\ & - i \sum_{m=1}^{\infty} m\, b_m \frac{1}{r^{m-1}} e^{-i(m+1)t} \\ & - i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m\, \overline{b_n}\, b_m \frac{1}{r^{n+m}} e^{i(n-m)t} . \end{aligned}$$

Beachten wir $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt = \delta_{k,0}$, $k \in \mathbb{Z}$,

so folgt

$$F(\gamma_r) = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{\gamma_r(t)}\,\dot{\gamma}_r(t)\,dt$$

$$= \pi\left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \frac{1}{r^{2n}}\right) \xrightarrow{r\to\infty} \infty.$$

Wegen $F(\gamma_r) = \pm \underbrace{\lambda^2(G_r)}_{>0}$ muss also $F(\gamma_r) \geq 0$ gelten.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \frac{1}{r^{2(n-1)}} \leq 1.$$

Weil dies für alle $r > 1$ erfüllt ist, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \leq 1.$$

Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und ein $N \geq 2$ mit

$$\sum_{n=1}^{N} n\,|b_n|^2 \geq 1 + \varepsilon.$$

Wir wählen $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2(N-1)}} > r > 1$ und rechnen nach:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 \frac{1}{r^{2(n-1)}} \geq \sum_{n=1}^{N} n\,|b_n|^2 \frac{1}{r^{2(n-1)}}$$

$$\geq \frac{1+\varepsilon}{r^{2(N-1)}} > 1$$

Der Widerspruch zeigt die Behauptung.

$\square$

2.4. Korollar

Für $g \in \Sigma$ gilt $|b_1| \leq 1$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn g die Form

$$(*) \quad g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} \quad \text{mit } |b_1| = 1$$

hat. In diesem Fall bildet g die Menge Δ auf das Komplement einer Strecke der Länge 4 ab.

Beweis:

Für $g \in \Sigma$ gilt nach Satz 2.4

$$|b_1|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1, \text{ d.h. } |b_1| \leq 1$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn g von der Form $(*)$ ist, denn für $|b_1| = 1$ erzwingt die obige Ungleichungskette

$$b_n = 0 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Der Zusatz folgt mit der Beobachtung, dass

$$g_0 : \Delta \to \mathbb{C} \setminus [-2, 2], \quad z \mapsto z + \frac{1}{z}$$

bijektiv ist und dass mit $b_1 = e^{i\theta}$ gilt

$$g(z) = b_0 + e^{i\theta/2} g_0(e^{-i\theta/2} z), \quad z \in \Delta.$$

$\square$

Um aus diesem Resultat für Funktionen aus Σ Aussagen über Funktionen aus $\mathcal{S}$ ableiten zu können, stellen wir zunächst einige Eigenschaften von $\mathcal{S}$ zusammen.

2.5. Satz:

(a) Ist $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, dann ist für schlichtes $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0)}$$

eine Funktion aus $\mathcal{S}$. (Koebe-Transformation)

(b) Für $f \in \mathcal{S}$ und $b \notin f(\mathbb{D})$ gehört auch

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{b \cdot f(z)}{b - f(z)}$$

zu $\mathcal{S}$.

Beweis: Nachrechnen!

2.6. Definition:

$$\mathcal{T} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} f(0) = 0, \; f'(0) = 1, \\ f|_{\mathbb{D} \setminus \{0\}} \text{ ist nullstellenfrei} \end{array} \right\}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.

2.7. Definition:

Eine Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ heißt Quadratwurzeltransformierte von $f \in \mathcal{J}$, wenn

$$g(z)^2 = f(z^2) \quad \text{und} \quad g'(0) = 1$$

gilt. Wir schreiben auch $g(z) = \sqrt{f(z^2)}$.

Dann ist g eindeutig durch f bestimmt, ist ungerade und gehört zu $\mathcal{J}$.

(i) Seien $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

$$g_j(z)^2 = f(z^2) \quad \text{und} \quad g_j'(0) = 1$$

für $j = 1, 2$. Dann gilt

$$\left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)^2 = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \quad g_1(z) = \lambda g_2(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

für ein $\lambda^2 = 1$, d.h. $\lambda = \pm 1$

Wegen $g_1'(0) = 1 = g_2'(0)$ folgt $\lambda = 1$ und damit $g_1 = g_2$.

(ii) Ist g eine Quadratwurzeltransformierte von f, so ist auch

$$\tilde{g} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto -g(-z)$$

eine solche. Nach (i) gilt $g = \tilde{g}$, d.h. g ist ungerade.

2.8. Satz:

Jede Funktion $f \in \mathcal{T}$ besitzt eine Quadratwurzeltransformierte g. Im Fall $f \in \mathcal{S}$ gilt auch $g \in \mathcal{S}$.

Beweis:

Die Funktion $z \mapsto f(z^2)$ ist nullstellenfrei in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ und hat in 0 eine Nullstelle zweiter Ordnung, d.h. es gibt $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

$$f(z^2) = z^2 \tilde{f}(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Da $\tilde{f}$ auf $\mathbb{D}$ nullstellenfrei ist, gibt es nach Satz 16.3 (d) im Skript zur Funktionentheorie I eine Funktion $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit

$$\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)^2 \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Für

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \pm z\,\tilde{g}(z)$$

gilt also

$$g(z)^2 = z^2 \tilde{g}(z)^2 = z^2 \tilde{f}(z) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ und

- $g'(z) = \pm z\,\tilde{g}'(z) \pm \tilde{g}(z) \Rightarrow g'(0) = \pm \tilde{g}(0)$
- $\tilde{g}(0)^2 = \tilde{f}(0) = \lim\limits_{z \to 0} \frac{f(z^2)}{z^2} = f'(0) = 1$

$\Rightarrow \tilde{g}(0) \in \{-1, 1\}$

Wählen wir für g das Vorzeichen von $\tilde{g}(0)$, so ist g die Quadratwurzel-transformierte von f.

Gilt $f \in \mathcal{S}$, so folgt aus

$$g(z_1) = g(z_2) \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{D}$$

zunächst

$$f(z_1^2) = f(z_2^2)$$

und damit $z_1^2 = z_2^2$. Es gilt also $z_1 = z_2$

<u>oder</u> $z_1 = -z_2$

$$\Rightarrow \quad g(z_1) = g(-z_2)$$
$$= -g(z_2) = -g(z_1)$$
$$\Rightarrow \quad g(z_1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad z_1 = 0 = z_2 .$$

Also ist g injektiv. $\Rightarrow g \in \mathcal{S}$.

$\square$

<u>Satz</u> (Fortsetzung von Satz 2.8)
Jede ungerade Funktion $g \in \mathcal{T}$ ist die Quadratwurzeltransformierte einer Funktion $f \in \mathcal{T}$. Ist $g \in \mathcal{S}$, so gilt auch $f \in \mathcal{S}$

<u>Beweis:</u>

Zu $g \in \mathcal{T}$ gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit der Eigenschaft

$$g(z) = z\, h(z^2) \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Wir setzen

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z\, h(z)^2.$$

Dann gilt

$$f(z^2) = z^2\, h(z^2)^2 = g(z)^2$$

und ferner $f \in \mathcal{T}$.

$f(0)=0$ ist klar. Ferner gilt
$f'(z) = h(z)^2 + 2h(z)h'(z) \Rightarrow f'(0) = h(0)^2 = 1$,
denn $h(0) = \lim_{z\to 0} h(z^2) = \lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z} = g'(0) = 1.$

Es gelte $g \in \mathcal{S}$. Zu $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ mit

$$f(z_1) = f(z_2)$$

können wir $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ mit $z_j = w_j^2,\ j = 1,2$ wählen und erhalten

$$g(w_1)^2 = f(w_1^2) = f(z_1)$$
$$= f(z_2) = f(w_2^2) = g(w_2)^2$$

$$\Longrightarrow \quad g(w_1) = \pm g(w_2)$$
$$\Longrightarrow \quad g(w_1) = g(\pm w_2), \text{ da } g \text{ ungerade ist.}$$
$$\Longrightarrow \quad w_1 = \pm w_2, \text{ da } g \text{ injektiv ist.}$$
$$\Longrightarrow \quad z_1 = w_1^2 = w_2^2 = z_2$$

$\square$

2.9. Bemerkung:

Sei $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ die Quadratwurzeltransformierte von $f \in \mathcal{J}$. Die Koeffizienten in den Potenzreihendarstellungen

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n+1} z^{2n+1}$$

erfüllen dann (mit $\alpha_1 := 1$)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2(n-k)+1} \cdot \alpha_{2k-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beispielsweise gilt also:

$$a_2 = 2\alpha_3$$

$$a_3 = 2\alpha_5 + \alpha_3^2$$

Aus $f(z^2) = g(z)^2$ folgt dies wegen

$$\begin{aligned} g(z)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n-k}\alpha_k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n} \alpha_{2n-k}\alpha_k\right) z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{2(n-k)+1}\alpha_{2k-1}\right) z^{2n}. \end{aligned}$$

Im Folgenden sei

- $k_0 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto \dfrac{z}{(1-z)^2}$

  die Koebe-Funktion, $k_0 \in \mathcal{S}$.

- $k_\Theta : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto \dfrac{z}{(1-e^{i\Theta}z)^2}$

  für $\Theta \in \mathbb{R}$ eine Rotation der Koebe-Funktion, $k_\Theta \in \mathcal{S}$.

Man beachte: $k_\Theta(z) = e^{-i\Theta} k_0(e^{i\Theta}z)$

2.10. Satz (Bieberbach, 1916):

Für $f \in \mathcal{S}$ mit der Darstellung

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

gilt $|a_2| \leq 2$. Genau dann ist $|a_2| = 2$ erfüllt, wenn f eine Rotation k_Θ der Koebe-Funktion ist.

Beweis:

Es bezeichne

- $h \in \mathcal{S}$ die Quadratwurzeltransformierte von f,

$$h(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n+1} z^{2n+1}.$$

• $g \in \Sigma'$ die Funktion

$$g : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}, \; \zeta \longmapsto \frac{1}{h(\frac{1}{\zeta})} = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}.$$

Wir wissen bereits $b_0 = 0$ und ferner

$$a_2 = 2\alpha_3 \quad \text{und} \quad b_1 = -\alpha_3,$$

d. h. es gilt

$$b_1 = -\frac{a_2}{2}.$$

Korollar 2.4 liefert dann $|a_2| \leq 2$ und besagt, dass $|a_2| = 2$ genau dann erfüllt ist, wenn gilt

$$g(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta}, \quad b_1 = -e^{i\theta}.$$

$$\Longrightarrow \quad h(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} - e^{i\theta} z} = \frac{z}{1 - e^{i\theta} z^2}$$

$$\Longrightarrow \quad f(z^2) = \frac{z^2}{(1 - e^{i\theta} z^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2} = k_\theta(z)$$

$\square$

Dieser Satz, der die Grundlage der Bieberbachschen Vermutung bildete, hat einige interessante Konsequenzen:

2.11. Satz (Koebescher $\frac{1}{4}$-Satz):

Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\frac{1}{4}\mathbb{D} \subseteq f(\mathbb{D}).$$

Genau dann gibt es ein $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ mit $|w| = \frac{1}{4}$, wenn $f = k_\Theta$ für ein $\Theta \in \mathbb{R}$ ist. In diesem Fall ist $w = -\frac{1}{4}e^{-i\Theta}$.

Beweis:

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$ gegeben. Wir betrachten

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{w\, f(z)}{w - f(z)},$$

wobei nach Satz 2.5. (c) $g \in \mathcal{S}$ gilt.

Weiter folgt

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \ldots,$$

so dass nach Satz 2.10.

$$\left| a_2 + \frac{1}{w} \right| \leq 2, \quad \text{also} \quad \frac{1}{|w|} \leq |a_2| + 2 \leq 4$$

erfüllt ist. Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn $a_2 = 2e^{i\Theta}$ und $\frac{1}{w} = -4e^{i\Theta}$ erfüllt ist, also wenn $f = k_\Theta$ und $w = -\frac{1}{4}e^{-i\Theta}$ für ein $\Theta \in \mathbb{R}$ gilt. $\square$

2.12. Satz (Koebescher Verzerrungssatz)

Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann gelten für alle $z \in \mathbb{D}$ die Ungleichungen

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \qquad (1)$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \qquad (2)$$

Beweis:

① Behauptung: Für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt

$$\left| z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leqslant \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

Beweis: Wir geben uns $a \in \mathbb{D}$ vor.

Für den Automorphismus

$$\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}, \quad z \longmapsto \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$$

gilt dann $a = \varphi(0)$ und $\varphi'(0) = 1-|a|^2$.

Nach Satz 2.5. (a) folgt nun $g \in \mathcal{S}$ für

$$g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{f(\varphi(z)) - f(a)}{(1-|a|^2)\, f'(a)}.$$

Wir schreiben

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

wobei $\alpha_2 = \frac{1}{2} g''(0)$ gilt.

Wegen $\varphi'(0) = 1-|a|^2$

und $\varphi''(0) = -2a(1-|a|^2)$

erhalten wir nun

$$g''(0) = \frac{f''(a)}{f'(a)} \cdot (1-|a|^2) - 2\bar{a} \,.$$

Gemäß Satz 2.10. gilt

$$\frac{1}{2}|g''(0)| = |\alpha_2| \leq 2$$

und somit

$$\left| \frac{f''(a)}{f'(a)} \cdot (1-|a|^2) - 2\bar{a} \right| \leq 4.$$

Multiplikation mit $\frac{|a|}{1-|a|^2}$ zeigt die behauptete Ungleichung (für a anstelle von z).

(2) Behauptung: Für $0<r<1$ und $\Theta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log|f'(re^{i\Theta})| \leq \frac{4+2r}{1-r^2}$$

Beweis: Nach Satz 1.5. ist die Funktion

$$f' : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

nullstellenfrei, besitzt also nach Satz 16.3.(c) im Skript zur Funktionentheorie I einen komplexen Logarithmus, d. h. es gilt eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f'(z) = \exp(F(z)) \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Wegen $f'(0) = 1$ können wir zudem

$$F(0) = 0$$

annehmen.

Es folgt nun für $z = re^{i\theta}$

$$\frac{\partial}{\partial r} F(re^{i\theta}) = F'(re^{i\theta}) \cdot e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot \frac{\partial}{\partial r} F(re^{i\theta}) = z \cdot F'(z)$$

$$= z \cdot \frac{f''(z)}{f'(z)}.$$

Mit ① sehen wir somit

$$\left| r \cdot \frac{\partial}{\partial r} F(re^{i\theta}) - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}.$$

und insbesondere (da $-|w| \leq \mathrm{Re}(w) \leq |w|$):

$$-\frac{4}{1-r^2} \leq \underbrace{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial r} F(re^{i\theta})\right)}_{} - \frac{2r}{1-r^2} \leq \frac{4}{1-r^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \mathrm{Re}\left(F(re^{i\theta})\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})|$$

Addition von $\frac{2r}{1-r^2}$ zeigt die Behauptung.

(3) Sei nun $z = Re^{i\theta}$ mit $0 < R < 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$ gegeben. (Für $z=0$ ist (1) trivial.)

Integration von (2) über $(0,R)$ gibt wegen $\log|f'(0)| = 0$

$$\int_0^R \frac{2r-4}{1-r^2}\,dr \le \log|f'(Re^{i\theta})| \le \int_0^R \frac{4+2r}{1-r^2}\,dr.$$

Mittels Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$\frac{2r-4}{1-r^2} = -\frac{1}{1-r} - \frac{3}{1+r} \quad \text{und}$$

$$\frac{4+2r}{1-r^2} = \frac{1}{1+r} + \frac{3}{1-r},$$

und somit die Ungleichung (1)

$$\log\left(\frac{1-R}{(1+R)^3}\right) \le \log|f'(Re^{i\theta})| \le \log\left(\frac{1+R}{(1-R)^3}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

(4) Für $z = Re^{i\theta}$ mit $0 < R < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(z) = \int_0^R f'(re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,dr$$

und damit

$$|f(z)| \leq \int_0^R |f'(re^{i\theta})|\, dr$$

$$\overset{③}{\leq} \int_0^R \frac{1+r}{(1-r)^3}\, dr = \frac{R}{(1-R)^2} = \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Es gilt somit die rechte Ungleichung in (2).

⑤ Für den Nachweis der linken Ungleichung in (2) für $z = Re^{i\theta}$ unterscheiden wir

Fall 1: $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$

Da die Funktion

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad r \longmapsto \frac{r}{(1+r)^2}$$

monoton wachsend ist, folgt

$$\frac{|z|}{(1-|z|)^2} = h(|z|) \leq h(1) = \frac{1}{4} \leq |f(z)|.$$

Fall 2: $|f(z)| < \frac{1}{4}$

Nach Satz 2.11 ist $\frac{1}{4}\mathbb{D} \subseteq f(\mathbb{D})$ erfüllt, weshalb

$$\{t \cdot f(z) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq f(\mathbb{D})$$

gilt. Wir betrachten

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{D}, \quad t \longmapsto f^{-1}(t \cdot f(z))$$

Dann hat die Kurve $f \circ \gamma$ die Länge $|f(z)|$.

Es gilt also

$$|f(z)| = \int_0^1 |(f\circ\gamma)'(t)|\, dt$$

$$= \int_0^1 |f'(\gamma(t))|\,|\dot\gamma(t)|\, dt$$

$$\overset{③}{\geq} \int_0^1 \frac{1-|\gamma(t)|}{(1+|\gamma(t)|)^3}\,|\dot\gamma(t)|\, dt$$

Wir wählen nun glatte Funktionen

$$\varrho : [0,1] \longrightarrow [0,1) \quad \text{und}$$

$$\omega : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

so dass gilt: $\gamma(t) = \varrho(t)\, e^{i\omega(t)} \quad \forall t\in[0,1]$.

$$\Longrightarrow \quad \dot\gamma(t) = \dot\varrho(t)\, e^{i\omega(t)} + \varrho(t)\, i\dot\omega(t)\, e^{i\omega(t)}$$

$$\Longrightarrow \quad |\dot\gamma(t)|^2 = \dot\varrho(t)^2 + \varrho(t)^2\dot\omega(t)^2$$

$$\geq \dot\varrho(t)^2$$

$$\Longrightarrow \quad |\dot\gamma(t)| \geq |\dot\varrho(t)| \geq \dot\varrho(t).$$

Also folgt

$$|f(z)| \geq \int_0^1 \underbrace{\frac{1-|\gamma(t)|}{(1+|\gamma(t)|)^3}}_{>0}\,|\dot\gamma(t)|\, dt$$

$$\geq \int_0^1 \frac{1-\varrho(t)}{(1+\varrho(t))^3}\,\dot\varrho(t)\, dt$$

$$= \int_{\rho(0)}^{\rho(1)} \frac{1-s}{(1+s)^3}\, ds$$

$$= \int_0^R \left[\frac{2}{(1+s)^3} - \frac{1}{(1+s)^2} \right] ds$$

$\gamma(0) = 0 \implies \rho(0) = 0,$
$\gamma(1) = z \implies \rho(1) = |z| = R$

$$= \left[-\frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{1+s} \right]_0^R$$

$$= -\frac{1}{(1+R)^2} + \frac{1}{1+R} = \frac{R}{(1+R)^2} = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

□

Durch sorgfältiges Auswerten aller Beweisschritte erhalten wir mit Satz 2.10:

2.13. Korollar:

Genau dann gibt es ein $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so dass in einer der vier Ungleichungen aus Satz 2.12. Gleichheit gilt, wenn f eine Rotation der Koebe-Funktion ist.

2.14 Korollar:

$\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist eine normale, abgeschlossene Familie, d.h. $\mathcal{S}$ ist eine kompakte Teilmenge des metrischen Raums $(\mathcal{O}(\mathbb{D}), d)$, wobei d die Metrik der kompakten Konvergenz bezeichnet.

2.15. Erinnerung:

(a) Sei $\omega : \mathbb{D} \longrightarrow [0,\infty)$ stetig. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \mid |f(z)| \leq \omega(z) \quad \forall z \in \mathbb{D} \}$$

lokalbeschränkt, denn es gilt

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_K \leq \|\omega\|_K < \infty$$

für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{C}$.

Nach dem Satz von Montel ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie, d.h. relativ-kompakt in $(\mathcal{O}(\mathbb{D}), d)$.

(b) <u>Satz von Hurwitz</u>

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge injektiver Funktionen aus $\mathcal{O}(G)$, die auf G kompakt gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder ebenfalls injektiv.

Beweis zu Korollar 2.14:

Nach 2.12 (2) ist $\mathcal{S}$ in

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D} \right\}$$

enthalten und somit nach 2.15 (a) eine normale Familie bzw. relativkompakt in $(\mathcal{O}(\mathbb{D}), d)$.

Dass $\mathcal{S}$ auch abgeschlossen und damit kompakt in $(\mathcal{O}(\mathbb{D}), d)$ ist, folgt aus 2.15 (b), denn ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{S}$, die kompakt gegen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ konvergiert, so gilt wegen

$$f_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_n'(0) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

auch

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(0) = 1,$$

d.h. f ist nicht konstant, muss also injektiv sein und gehört damit zu $\mathcal{S}$. $\square$

Da die Funktionale

$$a_n : (\mathcal{O}(\mathbb{D}), d) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \longmapsto a_n(f)$$

wegen

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, dz$$

$$\Longrightarrow \quad |a_n(f)| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\partial D_r(0)}, \quad r \in (0,1)$$

stetig sind, zeigt Korollar 2.14

$$\sup_{f \in \mathcal{S}} |a_n(f)| < \infty \qquad \forall n \geq 2.$$

Mit dem folgenden Resultat wird nun auch das in der Bieberbachschen Vermutung behauptete Wachstum begründet:

<u>2.16 Satz</u> (Littlewood, 1925):

Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$|a_n| < en \qquad \forall n \geq 2.$$

Für den Beweis benötigen wir etwas Vorbereitung:

2.17 Definition:

Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $0 < r < 1$ definieren wir

(a) für $0 < p < \infty$

$$M_p(f,r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

(b) für $p = \infty$

$$M_\infty(f,r) := \max_{t\in[0,2\pi]} |f(re^{it})|.$$

2.18 Lemma:

Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$M_1(f,r) \leq \frac{r}{1-r} \quad \text{für } 0 < r < 1.$$

Beweis:

Nach Satz 2.8 hat $f \in \mathcal{S}$ eine Quadratwurzeltransformierte $g \in \mathcal{S}$.
Mit Satz 2.12 (2) sehen wir

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

und damit

$$|g(z)|^2 = |f(z^2)| \leq \frac{|z|^2}{(1-|z|^2)^2} \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

also

$$|g(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2} \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Insbesondere bildet g die Kreisscheibe $D(0,r)$ ab auf ein Gebiet G_r mit (Maximumprinzip)

$$G_r \subsetneq D\left(0, \frac{r}{1-r^2}\right).$$

Die Inklusion ist echt, da sonst $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto \frac{1-r^2}{r} g(rz)$ eine Drehung sein müsste, d.h. $1 = |\phi'(0)| = 1 - r^2$ ↯

Es gilt also

$$\lambda^2(G_r) \overset{(!)}{<} \lambda^2\left(D\left(0, \frac{r}{1-r^2}\right)\right) = \pi \frac{r^2}{(1-r^2)^2}.$$

Da g injektiv ist, gilt nach dem Transformationssatz (man beachte Aufgabe 2, Blatt 1):

$$\lambda^2(G_r) = \int_{g(D(0,r))} 1 \, d\lambda^2(z)$$

$$= \int_{D(0,r)} |g'(z)|^2 \, d\lambda^2(z)$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} |g'(\varrho e^{i\theta})|^2 \varrho \, d\theta \, d\varrho$$

$$\overset{(*)}{=} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 r^{2n},$$

wobei wir die Darstellung

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}$$

verwendet haben.

Beweis zu (*):

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n z^{n-1}$$

$$\Rightarrow |g'(z)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n m \alpha_n \overline{\alpha_m} \, z^{n-1} \bar{z}^{m-1},$$

$$|g'(\rho e^{i\theta})|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} n m \alpha_n \overline{\alpha_m} \rho^{n+m-2} e^{i(n-m)\theta}.$$

Wegen $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = \delta_{n,m}$ folgt

$$\int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\alpha_n|^2 \rho^{2(n-1)}$$

und damit

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{i\theta})| \rho \, d\theta \, d\rho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \, |\alpha_n|^2 r^{2n}$$

Zusammenfassend ergibt sich nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, |\alpha_n|^2 r^{2n-1} < \frac{r}{(1-r^2)^2} \qquad \forall \; 0 \le r < 1$$

und daraus durch Integration über $[0,r]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 r^{2n} < \left[\frac{1}{1-\rho^2} \right]_0^r = \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Es gilt also:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 r^{2n}$$

$$< \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Damit erhalten wir schließlich

$$M_1(f,r) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} |f(re^{it})|\,dt$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} |g(\sqrt{r}\,e^{i t/2})|^2\,dt \quad , \ \theta := \frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\sqrt{r}\,e^{i\theta})|^2\,d\theta$$

$$< \frac{r}{1-r}.$$

□

<u>Beweis zu Satz 2.16:</u>

Für alle $0<r<1$ haben wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^{-n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\,e^{-int}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \le r^{-n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\,dt$$

$$= r^{-n}\,M_1(f,r)$$

Mit Lemma 2.18 folgt

$$|a_n| \leq r^{-n} M_1(f,r) < r^{-n+1} \frac{1}{1-r}.$$

Speziell für $r = 1 - \frac{1}{n}$ gilt also

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-(n-1)} \cdot n$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{<e} \cdot n \quad < en$$

$\square$

Man kann sogar zeigen (Baernstein, 1975), dass für alle $f \in \mathcal{S}$

$$M_1(f,r) \leq \frac{r}{1-r^2} \qquad \forall r \in [0,1)$$

gilt mit Gleichheit nur für Rotationen der Koebe-Funktion.

In der Tat gilt

$$M_1(k_\Theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{it}}{(1 - re^{i(\Theta+t)})^2} \right| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{|1 - re^{it}|^2} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r}{1 + r^2 - 2r\cos(t)} \, dt = \frac{r}{1-r^2}.$$

Ohne Beweis halten wir noch fest:

2.19. Satz (Hayman, 1955):

Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq 1.$$

Genau dann ist $\alpha = 1$, wenn f eine Rotation der Koebe-Funktion ist.

Bemerkenswert ist, dass sich der Hayman-Index α einer Funktion $f \in \mathcal{S}$ auch anders bestimmen lässt:

2.20 Satz:

Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\lim_{r \nearrow 1} \frac{1-r^2}{r} M_\infty(f,r) = \alpha$$

Ist f keine Rotation der Koebe-Funktion, so ist

$$r \longmapsto \frac{1-r^2}{r} M_\infty(f,r)$$

auf $(0,1)$ streng monoton fallend, d.h. $\alpha < 1$.

Es gilt nämlich

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{1-r^2}{r} M_\infty(f,r) = |f'(0)| = 1.$$