UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 0
zur mündlichen Bearbeitung in der ersten Übungswoche.
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Aufgabe 1. Käpt'n Schwarzbart, der alte Haudegen, hinterließ bei seinem unerwarteten Ableben im Alter von 107 Jahren auch eine Schatzkarte:

> Gehe direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele
> Schritte unter rechtem Winkel nach rechts
> - stecke die erste Fahne!
>
> Gehe vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genausoweit
> unter rechtem Winkel nach links
> - stecke die zweite Fahne!
>
> Der Schatz steckt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.

Die Erben starteten sofort eine Expedition auf die Schatzinsel. Die Palme und die markanten Felsbrocken waren sofort zu identifizieren. Vom Galgen war keine Spur mehr zu finden. Dennoch stieß man beim ersten Spatenstich auf die Schatztruhe, obwohl man die Schritte von einer (zufälligen und sehr wahrscheinlich) falschen Stelle aus gezählt hatte. Wie war das möglich? Wo lag der Schatz?

Hinweis: Rechnen Sie in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $\dfrac{i-1}{i+1}$

(b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 - 2i = 0$.

bitte wenden

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ nicht angeordnet werden kann, d.h. dass es keine Teilmenge $P \subset \mathbb{C}$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt entweder $z \in P$ oder $-z \in P$.

(ii) Für alle $z_1, z_2 \in P$ gilt $z_1 + z_2 \in P$.

(iii) Für alle $z_1, z_2 \in P$ gilt $z_1 \cdot z_2 \in P$.

Aufgabe 5. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(a) $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \right\}$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $b \neq 0$.

(b) $L := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left|z - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right| \cdot \left|z + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right| = \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - \zeta^k) \qquad \text{mit} \qquad \zeta := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

gilt, und nutzen Sie $|1 - \zeta^k| = 2\sin(\frac{k\pi}{n})$ aus.

Aufgabe 7. Sei $E \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) E ist zusammenhängend, d.h. es gibt keine disjunkten offenen Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}$ mit $U_1 \cup U_2 = E$.

(ii) Jede lokal konstante Funktion $f : E \to \mathbb{C}$ ist konstant. (Bemerkung: $f : E \to \mathbb{C}$ heißt lokal konstant, wenn es für alle $z \in E$ eine offene Umgebung $U \subseteq E$ von z gibt, so dass die Restriktion $f|_U$ konstant ist.)