UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2012

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 26.4.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen.
Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \qquad \text{und} \qquad |z| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| = 1.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir setzen

$$\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} |\ \overline{z} \in \Omega\}$$

und

$$g: \ \Omega^* \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}.$$

Zeigen Sie, dass g auf Ω^* holomorph ist und dass gilt

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})} \qquad \text{für alle } z \in \Omega^*.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ die durch die folgenden Vorschriften bestimmten Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

  (i) $f(x + iy) = x^3y^2 + ix^2y^3$
  (ii) $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + 2ixy$
  (iii) $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$

(b) Bestimmen Sie eine komplex differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = i$, für deren Realteil $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gilt

$$u(x + iy) = 2x^3y - 2xy^3 + x^2 - y^2.$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und ist

$$f:\ \Omega \to \mathbb{C},\ x+iy = (x,y) \mapsto f(x+iy) = f(x,y)$$

reell partiell differenzierbar, so definieren wir durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

die *Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen* $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ von f im Punkt $z_0 \in \Omega$.

Berechnen Sie die Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n\overline{z}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$

(b) $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$

(c) $f:\ \mathbb{C}\backslash\{-1,1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{1}{1-z^2}$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist genau dann in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell (total) differenzierbar, wenn Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \beta \overline{h} + o(|h|) \qquad \text{für } h \to 0.$$

In diesem Fall sind α und β eindeutig bestimmt und es gilt

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0).$$

(b) Die Funktion f ist genau dann auf Ω holomorph, wenn f auf Ω reell differenzierbar ist und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \qquad \text{für alle } z_0 \in \Omega. \tag{1}$$

In diesem Fall ist $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ für alle $z_0 \in \Omega$.

(c) Wie hängt die Bedingung (1) mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zusammen?

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben, so dass $f'(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ gilt, dann ist f konstant.

(b) Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ oder $f(\Omega) \subseteq i\mathbb{R}$ ist konstant.