UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 2
Abgabe: Donnerstag, 3.5.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktion, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)}$$

(b) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\frac{\partial (fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0).$$

(c) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktion, ferner $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(z_0) \in \Omega'$ und $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ reell partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z_0))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0).$$

Wie lauten die zu (b) und (c) analogen Rechenregeln für die partielle Ableitung nach $\overline{z}$?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall. Zeigen Sie:

(a) Sind $\varphi, \psi : I \to \mathbb{C}$ differenzierbare Kurven und ist $\psi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so gilt

$$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = \frac{\varphi'(t)\psi(t) - \varphi(t)\psi'(t)}{\psi(t)^2} \qquad \text{für alle } t \in I.$$

(b) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\psi : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Kurve mit $\psi(I) \subset \Omega$, dann ist auch

$$\varphi : \ I \to \mathbb{C}, \ t \mapsto f(\psi(t))$$

differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(t) = f'(\psi(t))\psi'(t) \qquad \text{für alle } t \in I.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\overline{f}$ ist genau dann auf Ω holomorph, wenn f konstant ist.

(b) Ist $\mathrm{Re}(f)$ auf Ω konstant, so ist f konstant.

(c) Ist $\exp(f)$ auf Ω konstant, so ist f konstant.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Im Folgenden sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

(b) Sei p ein Polynom vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ den Konvergenzradius 1 hat und dass es ein Polynom q vom Grad k gibt mit

$$\frac{q(z)}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{D}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Polynome $p_0(z) := 1$ und $p_k(z) := \prod_{j=0}^{k-1} (z-j)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Entwickeln Sie die Funktion

$$f : \ \mathbb{C} \backslash \{2, 3\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{z^2 - 5z + 6}$$

in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ sei eine holomorphe Funktion f gegeben, die durch eine auf $\mathbb{D}$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dargestellt werde. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $r \in [0, 1)$ gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(b) Ist f auf $\mathbb{D}$ beschränkt, so ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{r \nearrow 1} \sqrt{1-r} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = 0.$$