UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 10.5.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Im Folgenden sei $D := \{z \in \mathbb{C} |\ |z-1| < 1\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion
$$f:\ D \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$$
ist auf D holomorph und wird dort durch die folgende Potenzreihe dargestellt:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

(b) Es gibt unendlich viele offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit $\exp(\Omega) = D$, auf denen die Abbildung $\exp : \Omega \to D$ bijektiv ist.

(c) Ist Ω eine der Mengen aus Aufgabenteil (b), so ist die Umkehrfunktion $\log : D \to \Omega$ zu $\exp : \Omega \to D$ holomorph und es gilt $\log'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in D$.

(d) Bestimmen Sie in der Situation von Aufgabenteil (c) die Potenzreihendarstellung von log auf D.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht auf der Spur $\gamma([a,b])$ von γ liegt. Beweisen Sie: Gibt es stetig differenzierbare Funktionen $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\rho : [a,b] \to (0,\infty)$, so dass
$$\gamma(t) - z_0 = \rho(t)\exp(i\theta(t)) \qquad \text{für alle } t \in [a,b]$$
gilt, dann ist
$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$. Berechnen Sie den Wert des Integrals
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a^2+b^2) + 2ab\cos(t)} dt.$$
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Kurve $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, die den Rand der Kreisscheibe um a mit Radius b im positiven Sinn durchläuft, $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$ erfüllt.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ zwei geschlossene, glatte Kurven. Wir nennen α und β *zusammensetzbar*, falls $\alpha(1) = \beta(0)$ gilt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall durch

$$\alpha \oplus \beta : \ [0,1] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

eine geschlossene, stückweise glatte Kurve definiert wird und dass für alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, die weder auf der Spur von α noch auf der Spur von β liegen, gilt

$$\operatorname{Ind}_{\alpha\oplus\beta}(z_0) = \operatorname{Ind}_{\alpha}(z_0) + \operatorname{Ind}_{\beta}(z_0).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom, d.h. es gibt Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, so dass gilt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Weiter sei $\gamma(a,r)$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ die Kurve, die den Rand der Kreisscheibe $D(a,r)$ im positiven Sinn durchläuft. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma(a,r)} \overline{p(z)} dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(a)}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für spezielle Polynome p.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** In der Analysis III sind uns bereits vektorwertige Differentialformen begegnet. Fassen wir $\mathbb{C}$ mit der üblichen Identifikation $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, so können wir insbesondere komplexwertige Differentialformen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ betrachten. Sei nun $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

(a) Präzisieren Sie diese Aussagen, d.h. definieren Sie, was wir unter einer komplexen Differentialform vom Grad p (kurz: p-Form) auf U verstehen.

(b) Zeigen Sie, dass zu jeder komplexen p-Form ω auf U zwei eindeutig bestimmte reelle p-Formen ω_1, ω_2 auf U existieren, so dass $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ gilt.
Insbesondere können wir durch $d\omega := d\omega_1 + i d\omega_2$ die äußere Ableitung definieren.

(c) Wir setzen $dz := dx + i dy$ und $d\overline{z} := dx - i dy$. Zeigen Sie: Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell partiell differenzierbare Funktion, so gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z}.$$

(d) Sei $f \in \mathcal{O}(U)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Differentialform $f\, dz$ geschlossen ist, d.h. dass gilt $d(f\, dz) = 0$.