UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 4
Abgabe: Donnerstag, **24.5.2012 (!)**, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dargestellt werde. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben und wir setzen $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{m})$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$g :\ \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\zeta^k z)$$

besitzt auf $\mathbb{D}$ die Potenzreihendarstellung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} z^{nm}.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{(3n)!} = \frac{1}{3}\big(e^2 + 2e^{-1}\cos(\sqrt{3})\big)$$

(c) Erfüllt f die Bedingung $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$, so gibt es eine Funktion $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $f(z) = h(z^m)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und konvex und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z_1, z_2 \in \Omega$ mit $z_1 \neq z_2$ gilt

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1)\, dt.$$

(b) Ist K eine kompakte und konvexe Teilmenge von Ω, so gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \sup_{z \in K} |f'(z)|\, |z_1 - z_2| \qquad \text{für alle } z_1, z_2 \in K.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet. Weiter sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $\mathrm{Re}(f'(z)) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\partial D(z_0, r)$ die Kurve, die den Rand der Kreisscheibe $D(z_0, r)$ mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$ im positiven Sinn durchläuft.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Durch die Vorschrift

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{w(w-z)}\, dw$$

wird auf $\mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion f_1 und auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion f_2 definiert. Bestimmen Sie f_1 und f_2.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}\, dz.$$

(b) Berechnen Sie mit Aufgabenteil (a) das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(x)}\, dx.$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine reell stetig partiell differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie: Für die komplexe Differentialform $f\, dz$ gilt

$$d(f\, dz) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z} \wedge dz.$$

(b) Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to U$ eine glatte Kurve. Erklären Sie, warum unsere Definition 2.9 des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)dz$ mit der aus der Analysis III bekannten Integration von 1-Formen übereinstimmt.

(c) Seien $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ gegeben. Folgern Sie aus dem Satz von Stokes die Formel

$$\int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\, dz = 2i \int_{D(z_0,r)} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x + iy)\, d\lambda^2(x, y),$$

wobei wir mit λ^2 das zweidimensionale Lebesgue-Maß auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bezeichnen.