UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 5
Abgabe: Mittwoch, 6.6.2012, 18:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f := f_1 \cdots f_n$ gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \dots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \qquad \text{für alle } z \in \Omega.$$

(b) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom und sei γ eine glatte geschlossene Kurve, auf der keine Nullstellen von p liegen. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \sum_{z \in N(p)} m_p(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z), \qquad \text{wobei} \qquad N(p) := \{z \in \mathbb{C} | \ p(z) = 0\}$$

und $m_p(z) \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle $z \in N(p)$ bezeichnet, und interpretieren Sie das Ergebnis im Fall, dass γ der Rand einer Kreisscheibe ist.

Hinweis: Fundamentalsatz der Algebra, Aufgabenteil (a).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f: \ \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Zeigen Sie, dass f holomorph ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$ erfüllt, wobei wir $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$ definieren. Ist f beschränkt auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$?

(b) Wir setzen $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} | \ \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Geben Sie eine stetige, unbeschränkte Funktion $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ an, deren Restriktion $f|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und die auf $\partial\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Warum stellen diese Beispiele keinen Widerspruch zu dem in Korollar 4.8 formulierten Maximumprinzip dar?

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie die folgende Variante des Maximumprinzips: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und ist $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit holomorpher Restriktion $f|_G : G \to \mathbb{C}$, dann gilt

$$|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \qquad \text{für alle } z \in G$$

und, falls es ein $z_0 \in G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{w \in \partial G} |f(w)|$$

gibt, dann ist f konstant.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Liouville die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann gilt $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(b) Gibt es zu einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen w_1 und w_2, so dass die Bedingung

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

erfüllt ist, dann ist f konstant.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Gegeben seien die beiden folgenden Potenzreihen

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Zeigen Sie:

(a) Durch die obigen Potenzreihen werden holomorphe Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dargestellt, die die aus der reellen Analysis bekannten (gleichnamigen) trigonometrischen Funktionen fortsetzen.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.

(c) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \\ \cos(z + w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w). \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$$

und zeigen Sie, dass sich diese im Punkt $1 \in \partial\mathbb{D}$ häufen.

(b) Für welche offenen Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit $\mathbb{D} \subseteq \Omega$ ist die Restriktionsabbildung

$$\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\mathbb{D}), \ g \mapsto g|_{\mathbb{D}}$$

surjektiv?