UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 14.6.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Verwenden Sie die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel um folgende Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int_{\partial D(1,\frac{1}{2})} \frac{\log(z)}{(z-1)^2}\,dz$ mit $\log : D(1,1) \to \mathbb{C}$ aus Aufgabe 1, Blatt 3

(b) $\displaystyle\int_{\partial D(0,\frac{1}{2})} \frac{\exp(1-z)}{z^3(1-z)}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_{\partial D(0,r)} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}\,dz$ für $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| < r < |b|$

Mit $\partial D(z_0, r)$ bezeichnen wir dabei die Kurve, die den Rand der Kreisscheibe $D(z_0, r)$ im positiven Sinn durchläuft.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom vom Grad n. Zeigen Sie:

(a) Gibt es ein $C > 0$, so dass die Bedingung

$$|f(z)| \leq C|p(z)| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

erfüllt ist, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f = \lambda p$.

(b) Gibt es Konstanten $R > 0$ und $C > 0$, so dass die Bedingung

$$|f(z)| \leq C|p(z)| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

erfüllt ist, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist, falls $\operatorname{Re} f$ ein lokales Maximum in G hat.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{|n|} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, die

$$g\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad g\Big(\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt?

Aufgabe 5 (10 Punkte). Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der durch die folgenden Vorschriften gegebenen holomorphen Funktionen und geben Sie im Fall eines Pols dessen Ordnung an:

(a) $z \mapsto \dfrac{1}{z^5 - 4z^3}$

(b) $z \mapsto \dfrac{\cos(z) - 1}{z^2}$

(c) $z \mapsto z\cot^2(z) \qquad \text{mit} \qquad \cot(z) := \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$

(d) $z \mapsto \exp\left(\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)\right)$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Wir setzen nun die in den Zusatzaufgaben der Übungsblätter 3 und 4 begonnene Untersuchung komplexer Differentialformen fort.

(a) Sei ω eine zweimal stetig differenzierbare komplexe Differentialform vom Grad p auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $d(d\omega) = 0$ gilt.

(b) Definieren Sie, wann wir eine komplexe Differentialform geschlossen bzw. exakt nennen, und beweisen Sie die folgende komplexe Variante des Lemmas von Poincaré: Jede geschlossene komplexe Differentialform vom Grad $p \geq 1$ auf einer offenen und sternförmigen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist exakt.

(c) Folgern Sie aus Aufgabenteil (b): Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und sternförmig, so besitzt jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion, d.h. es gibt eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $F' = f$.