UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 21.6.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist a eine Polstelle der Ordnung m von f', so gilt $m \geq 2$ und f hat in a einen Pol der Ordnung $m-1$.

(b) Ist a eine hebbare Singularität für f', so ist a auch eine hebbare Singularität für f.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Auf $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{-1, 1, 3\}$ betrachten wir die Funktion

$$f:\ \Omega \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f

(a) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z| < 3\}$.

(b) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} |\ 1 < |z-2| < 3\}$.

(c) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1 + 3i$ konvergiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei γ eine glatte geschlossene Kurve und sei $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf der Spur γ^* von γ. Wir definieren die Funktion

$$\tilde{f}:\ \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Zeigen Sie $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\backslash\gamma^*)$ und bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\tilde{f}$ um einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Folgern Sie damit

$$\tilde{f}^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \qquad \text{für alle } z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$. Skizzieren Sie eine geschlossene Kurve γ in Ω, die

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$$

erfüllt, aber **nicht** nullhomotop in Ω ist. (Ein Beweis, dass die von Ihnen skizzierte Kurve γ die geforderten Bedingungen erfüllt, ist nicht nötig.)

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Gegeben sei die holomorphe Funktion

$$f:\ \mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}.$$

Zeigen Sie, dass f in 0 durch $f(0) := 1$ holomorph ergänzt wird und in einer Umgebung von 0 eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

besitzt, wobei die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv bestimmt wird durch $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ und

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Für festes $w \in \mathbb{C}$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f_w:\ \mathbb{C}\backslash 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{ze^{wz}}{e^z - 1}.$$

Zeigen Sie, dass f_w in 0 durch $f_w(0) := 1$ holomorph ergänzt wird und in einer Umgebung von 0 die Potenzreihendarstellung

$$f_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(w)}{n!} z^n$$

besitzt, wobei die Folge $(B_n(w))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben ist durch

$$B_n(w) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k w^{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 5

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\big(B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}\big) \qquad \text{für alle } m,n \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Welche Ergebnisse erhalten wir für $m = 0, 1, 2$?