UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2012

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 28.6.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt wird mit 50 Punkten gewichtet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie: Hat eine holomorphe Funktion $f : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ an der Stelle $a \in \Omega$ einen Pol erster Ordnung, so hat die Funktion

$$g: \ \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(f(z))$$

eine wesentliche Singularität in a.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zu $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 \neq r_2$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ betrachten wir die geschlossene Kurve

$$\gamma: \ [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto r_1 e^{in_1 t} + r_2 e^{in_2 t}.$$

Zeigen Sie $0 \notin \gamma^*$ und

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \begin{cases} n_1, & \text{falls } r_1 > r_2 \\ n_2, & \text{falls } r_1 < r_2 \end{cases}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.10 der Vorlesung.

Aufgabe 3 (**20 Punkte!**)**.** Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln für den Umgang mit Residuen. Dabei sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$.

(a) Sind $f, g \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$ gegeben, dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Res}(\alpha f + \beta g; a) = \alpha\,\mathrm{Res}(f; a) + \beta\,\mathrm{Res}(g; a).$$

(b) Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$ an der Stelle a einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$\mathrm{Res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z - a) f(z).$$

(c) Ist a eine Polstelle erster Ordnung von $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$, dann gilt für alle $g \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\mathrm{Res}(gf; a) = g(a)\,\mathrm{Res}(f; a).$$

bitte wenden

(d) Hat $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Nullstelle erster Ordnung in a, dann ist

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{h}; a\right) = \frac{1}{h'(a)}.$$

(e) Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{a\})$ einen Pol der Ordnung n in a, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; a) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a),$$

wobei die Funktion $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ durch holomorphe Fortsetzung von $g(z) = (z-a)^n f(z)$ bestimmt wird.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes den Wert der folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\partial D_2(0)} \frac{\cos(z)}{z^2+1}\, dz$

(b) $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)} \frac{z}{e^{iz}-1}\, dz$

(c) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{z}{\cosh(z)-1}\, dz,$

wobei die Kurve Γ den Rand der Menge

$$\{x + iy \in \mathbb{C} |\ y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2)\}$$

im positiven Sinn durchläuft.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \backslash \overline{D_r(a)})$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{f}:\ \dot{D}_{1/r}(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto f\left(a + \frac{1}{z}\right)$$

holomorph ist und durch $\tilde{f}(0) := 0$ zu einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D_{1/r}(0))$ ergänzt werden kann. Geben Sie auch eine Formel für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von $\tilde{f}$ um den Punkt 0 an.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass f auf $\mathbb{C} \backslash \overline{D_r(a)}$ eine Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

besitzt, wobei sich die Koeffizienten mit der Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(0)} f(z)(z-a)^{n-1}\, dz \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für ein beliebiges $\rho > r$ berechnen lassen.