UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 9
Abgabe: Donnerstag, 5.7.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+5}{(x^2+1)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2-2x+2}\,dx$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a)(x^2+b)}\,dx.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $R > 1$ und sei $f : D_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\Big(\frac{t}{2}\Big)\,dt = \pi\Big(f(0) + \frac{f'(0)}{2}\Big).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung der offenen Menge $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|f-g\|_{K_n}}{1+\|f-g\|_{K_n}} \qquad \text{für } f,g \in C(\Omega)$$

wird eine Metrik d auf $C(\Omega)$ definiert.

(b) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(\Omega)$ ist genau dann kompakt konvergent auf Ω, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C(\Omega), d)$ ist.

(c) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C(\Omega)$ konvergiert genau dann kompakt gegen eine Funktion $f \in C(\Omega)$, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(C(\Omega), d)$ gegen f konvergiert.

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\mathcal{F}$ eine lokalbeschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ auch

$$\mathcal{F}^{(k)} := \{f^{(k)} |\ f \in \mathcal{F}\}$$

eine lokalbeschränkte Teilmenge von $\mathcal{O}(\Omega)$ ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Korollar 10.9 der Vorlesung:

Satz (von Vitali)**.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalbeschränkte Folge aus $\mathcal{O}(G)$ mit der Eigenschaft, dass*

$$A := \Big\{z \in G \Big|\ (f_n(z))_{n\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert}\Big\}$$

einen Häufungspunkt in G hat, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt auf G.