UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 10
Abgabe: Donnerstag, 12.7.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial D(0,\pi)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

für die durch die folgenden Vorschriften definierten Funktionen:

(a) $f(z) = \sin(\pi z)$

(b) $f(z) = \cos(\pi z)$

(c) $f(z) = \tan(\pi z)$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $\gamma : [0,1] \to \Omega$ eine glatte, geschlossene Kurve. Weiter sei eine auf γ^* nullstellenfreie Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gegeben. Mit $m_f(a) \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir die Vielfachheit einer Nullstelle a von f. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \sum_{a\in f^{-1}(\{0\})} m_f(a)\operatorname{Ind}_\gamma(a).$$

Folgern Sie damit erneut das Ergebnis aus Aufgabe 2 von Blatt 8.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Bereich:

(a) $p(z) = z^4 + 4z - 2 \quad$ auf $D_1(0)$.

(b) $p(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3} \quad$ auf $D_1(0)$.

(c) $p(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3} \quad$ auf $D_{\frac{1}{2}}(0)$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $\lambda > 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{-z} + z = \lambda$$

in der rechten Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ genau eine Lösung z hat, die überdies reell ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt konvergente Folge von auf G nullstellenfreien, holomorphen Funktionen. Zeigen Sie, dass die nach dem Satz von Weierstraß holomorphe Grenzfunktion f entweder identisch auf G verschwindet oder ebenfalls keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.**

(a) Konstruieren Sie ein unendliches Produkt, das auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit der Nullstellenmenge $\{\frac{\pi}{2} + \pi n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ konvergiert.
(Um welche bekannte Funktion könnte es sich dabei handeln?)

(b) Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - nz^n)$$

auf $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ kompakt gegen eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion f konvergiert, und bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f.
Zeigen Sie weiter, dass jeder Punkt der Einheitskreislinie $\partial\mathbb{D}$ Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f ist.