UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012

Blatt 11
Abgabe: Donnerstag, 19.7.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt wird mit 50 Punkten gewertet. Durch Bearbeiten aller Aufgaben können Sie 10 Zusatzpunkte erwerben.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie durch Abwandlung des Beweises zum Satz von Mittag-Leffler: Jede Hauptteilverteilung in einer Kreisscheibe ist lösbar, d.h. ist $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe, so gibt es zu jeder Familie $\{h_a |\ a \in P\}$ von Funktionen $h_a \in \mathcal{O}(D \backslash \{a\})$ der Form

$$h_a(z) = \sum_{n=1}^{m} \frac{c_n}{(z-a)^n},$$

die durch eine Menge $P \subset D$ indiziert wird, welche keine Häufungspunkte in D hat, eine meromorphe Funktion f auf D, deren Laurententwicklung in jedem der Punkte $a \in P$ den Hauptteil h_a besitzt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Konstruieren Sie unter Verwendung von Aufgabe 1 eine meromorphe Funktion f auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, die einfache Pole vom Residuum 1 genau in den Punkten aus $\{1 - \frac{1}{n} |\ n \in \mathbb{N}\}$ hat.

Aufgabe 3 (**20 Punkte!**)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die durch die Vorschrift

$$f_1(z) := \pi \cot(\pi z) = \pi i \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}$$

gegebene Funktion f_1 auf $\mathbb{C}$ meromorph ist mit einfachen Polen vom Residuum 1 genau in den Punkten aus $\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass auch die durch

$$f_2(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}$$

gegebene Funktion f_2 auf $\mathbb{C}$ meromorph ist und genau in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ Polstellen erster Ordnung mit dem Residuum 1 besitzt.

bitte wenden

(c) Beweisen Sie, dass f_1 und f_2 periodisch mit der Periode 1 sind, also

$$f_1(z+1) = f_1(z) \qquad \text{und} \qquad f_2(z+1) = f_2(z)$$

erfüllen, und dass ihre Differenz $f_1 - f_2$ eine beschränkte ganze Funktion ist.

(d) Folgern Sie, dass $f_1 - f_2$ konstant ist und dass diese Konstante 0 sein muss. Zeigen Sie hierzu zunächst

$$\lim_{y\to\infty} f_2(iy) = -2i \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = -\pi i.$$

(e) Leiten Sie aus den vorangegangenen Aufgabenteilen die folgende Partialbruchzerlegung her:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

(f) Folgern Sie die Produktdarstellung

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Nutzen Sie dabei aus, dass

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \pi \cot(\pi z)$$

für die Funktion

$$g : \ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \sin(\pi z)$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ eine holomorphe Funktion, die $f(a) = a$ und $f(b) = b$ für zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{D}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann schon $f(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gelten muss.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass f ein Automorphismus von $\mathbb{D}$ sein muss.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die die beiden Bedingungen

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \qquad \text{und} \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

erfüllt?