UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2012
Präsenzblatt
zur mündlichen Bearbeitung in den Übungsgruppen.
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Mit den folgenden Aufgaben wollen wir den *komplexen Logarithmus* und damit eine der wichtigsten holomorphen Funktionen untersuchen. Seinen besonderen Stellenwert verdankt der komplexe Logarithmus nicht nur der Tatsache, dass er eine Antwort auf die recht natürliche Frage nach den Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $\exp(w) = z$ bei gegebenem $z \in \mathbb{C}$ gibt, sondern auch den vielen wegweisenden Fragestellungen, die er motiviert.

Der komplexe Logarithmus ist uns bereits in Aufgabe 1 von Blatt 3 begegnet. Dort haben wir gesehen, dass es zur Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} | \; |z-1| < 1\}$ unendlich viele offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit $\exp(\Omega) = D$ gibt, für die die Abbildung $\exp : \Omega \to D$ bijektiv ist. Ferner haben wir dort gezeigt, dass die zugehörige Umkehrfunktion $\log : D \to \Omega$ holomorph ist und $\log'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in D$ erfüllt.
Mit den beiden folgenden Aufgaben bauen wir diese Argumentationen nun weiter aus:

Aufgabe 1. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$S_n := \{z \in \mathbb{C} | \; (2n-1)\pi < \operatorname{Im}(z) < (2n+1)\pi\}.$$

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induziert eine bijektive Abbildung $\exp : S_n \to \mathbb{C}_-$ auf die *geschlitzte Zahlenebene*

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} | \; \operatorname{Im}(z) = 0, \; \operatorname{Re}(z) \leq 0\}.$$

(b) Die zugehörige Umkehrabbildung $L_n : \mathbb{C}_- \to S_n$ ist holomorph und erfüllt

$$L_n'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_- \qquad \text{und} \qquad L_n(1) = 2n\pi i$$

Aufgabe 2. Begründen Sie, dass $\mathbb{C}_-$ bezüglich 1 sternförmig ist, und zeigen Sie:

(a) Durch

$$L(z) := \int_{[1,z]} \frac{1}{w} \, dw \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-$$

wird eine holomorphe Funktion $L : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ definiert, die

$$L'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_- \qquad \text{und} \qquad L(1) = 0$$

erfüllt. Hierbei bezeichnen wir für $z \in \mathbb{C}_-$ mit $[1, z]$ die durch $t \mapsto 1 + t(z-1)$ über $[0, 1]$ parametrisierte Strecke von 1 nach z.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}_-$ gilt $\exp(L(z)) = z$ und für alle $z \in S_0$ gilt $L(\exp(z)) = z$.

Wir sehen also, dass auf $\mathbb{C}_-$ die Frage nach der Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion und die Frage nach Stammfunktionen zu $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine gemeinsame Antwort haben.

Aufgabe 3. Begründen Sie, dass Aufgabe 1 im Fall $n = 0$ und Aufgabe 2 zur selben Funktion $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ führen. Diese nennen wir den *Hauptzweig des Logarithmus*. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}_-$ gilt $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\arg(z)$, wobei wir mit $\arg(z)$ den durch $z = |z|e^{i\varphi}$ eindeutig bestimmten Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi)$ und mit $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ den reellen Logarithmus bezeichnen.

(b) Für alle $x < 0$ haben wir

$$\lim_{\substack{z\to x\\ \mathrm{Im}(z)>0}} \mathrm{Log}(z) = \log|x| + i\pi \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{z\to x\\ \mathrm{Im}(z)<0}} \mathrm{Log}(z) = \log|x| - i\pi.$$

Da bei der Lösung der Gleichung $\exp(w) = z$ für gegebenes $z \in \mathbb{C}_-$ neben dem Hauptzweig $\mathrm{Log} = L_0 : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ noch die sogenannten *Nebenzweige* $\mathrm{Log}_n := L_n : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ des Logarithmus zu berücksichtigen sind, ist insbesondere im Umgang mit komplexen Potenzen Vorsicht geboten:

Aufgabe 4. Sind $z \in \mathbb{C}_-$ und $w \in \mathbb{C}$ gegeben, so definieren wir

$$z^w := \exp(w\,\mathrm{Log}(z)).$$

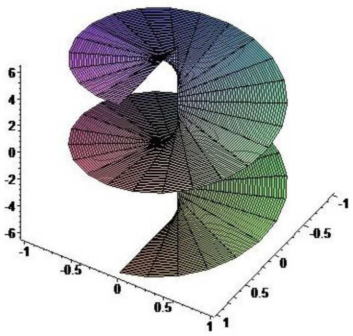
Berechnen Sie die Potenz i^i und zeigen Sie:

(a) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$ gilt $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$ und $w \in \mathbb{C}$ gilt $(ab)^w = a^w b^w$.

Ist die Einschränkung $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0$ dabei jeweils nötig?

Um der in Aufgabe 3 (b) bemerkten Unstetigkeit von Log am negativen Teil der reellen Achse sowie der Existenz der Nebenzweige Log_n gerecht zu werden, benötigt man das Konzept Riemannscher Flächen.



Zusatzaufgabe*. Wir betrachten die Menge

$$X := \{(re^{it}, t) |\ r > 0,\ t \in \mathbb{R}\} \subset (\mathbb{C}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$$

und definieren auf ihr die Funktion

$$F :\ X \to \mathbb{C},\ (w, t) \mapsto \log|w| + it.$$

Weiter sei

$$\varphi :\ \mathbb{C} \to X,\ z \mapsto (\exp(z), \mathrm{Im}(z)).$$

Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{Z}$ gegeben, dann gilt

$$F(\varphi(z)) = z \qquad \text{für alle } z \in S_n.$$