UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 0
zur mündlichen Bearbeitung in der ersten Übungswoche.
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Aufgabe 1. Wir wollen in dieser Aufgabe die topologischen Grundbegriffe wiederholen. Sollten Sie die Definitionen oder das Konzept eines oder mehrerer Begriffe nicht (mehr) kennen, nutzen Sie die Gelegenheit, um diese Lücken in der Präsenzübung zu klären!

(i) Was versteht man unter einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, was sind offene / abgeschlossene / kompakte Mengen. Überlegen Sie sich Beispiele im Fall $X = \mathbb{R}^2$.

(ii) Was versteht man unter einem metrischen Raum (X, d) und was unter offenen Kugeln $B_\varepsilon(x_0)$ in einem metrischen Raum, wobei $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in X$? Geben Sie die Definition einer offenen Menge in einem metrischen Raum mit Hilfe von offenen Kugeln an und definieren Sie den Begriff einer stetigen Funktion zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y).

(iii) Was versteht man unter einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$? Wie hängen die Konzepte „topologischer Raum“, „metrischer Raum“ und „normierter Raum“ zusammen?

(iv) Was versteht man unter einer konvergenten / Cauchy-Folge in $(X, \|\cdot\|)$ und wie hängen diese beiden Begriffe zusammen? Wann spricht man von einem Banachraum?

(v) Was ist eine komplexe Zahlenreihe? Was versteht man unter einer konvergenten / absolut konvergenten komplexen Zahlenreihe? Formulieren Sie das Cauchy-Kriterium für komplexe Zahlenreihen.

(vi) Sei nun $z_n = x_n + iy_n$ eine Folge komplexer Zahlen und $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, z_n konvergiert gegen z in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ genau dann, wenn x_n gegen x und y_n gegen y in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ konvergieren.

(vii) Seien nun $a, z \in \mathbb{C}$ und $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ für $|z| < 1$ und imitieren Sie den Beweis im reellen Fall.

bitte wenden

Aufgabe 2. In dieser zweiten Aufgabe wollen wir die Grundlagen des mehrdimensionalen Differentialkalküls wiederholen. Wie in Aufgabe 1 sind Sie dazu aufgerufen, unbekannte Begriffe durch **aktives Nachfragen** aufzuarbeiten.

(i) Definieren Sie die Begriffe „partielle Differenzierbarkeit" und „totale Differenzierbarkeit" für eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge ist.

(ii) Welcher Zusammenhang besteht zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit.

(iii) Formulieren Sie den Satz von Schwarz.

(iv) Betrachten Sie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Ist f zweimal stetig partiell differenzierbar?