UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 1
Abgabe: Donnerstag, 27.4.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

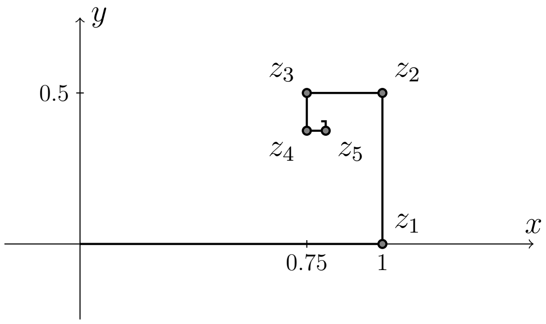
Aufgabe 1.

(i) Seien $q \in (0,1)$ und $\varphi \in [0,2\pi)$. Berechnen Sie Real- sowie Imaginärteil von

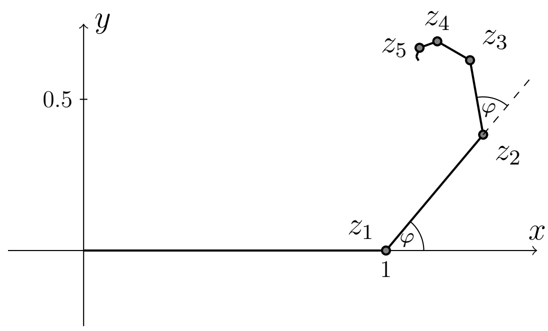
$$z = \frac{1}{1 - qe^{i\varphi}}.$$

(ii) Wir betrachten die eckige Spirale, deren Teilstrecken sich in jedem Schritt um die Hälfte ihrer Länge verkürzen und senkrecht auf ihrem Vorgänger stehen. Wir bebildern dies mit Figur 1. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eckpunkte der Spirale gegen ein $z \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

(iii) Wir modifizieren die Spirale aus Teil (ii) durch Änderung des rechten Winkels zwischen zwei Teilstrecken zu einem beliebigen Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$. Wir bebildern dies mit Figur 2. Zeigen Sie, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Eckpunkte der Spirale gegen ein $z \in \mathbb{R}^2$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.



Figur 1



Figur 2

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene:

(i) $H := \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{2i}\right) > 0 \right\}$

(ii) $D := \left\{ z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 3 \right\}$

bitte wenden

(iii) $L := \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \left| z - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right| \cdot \left| z + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right| = \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für alle $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}(z - \zeta^k)$ mit $\zeta := \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ gilt, und nutzen Sie $|1 - \zeta^k| = 2\sin(\frac{k\pi}{n})$ aus.

Aufgabe 4. Sei $M_2(\mathbb{R})$ die Menge aller (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

zusammen mit der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Körper bildet.

(ii) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathcal{C}$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, und geben Sie einen Isomorphismus $\Phi \colon \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ explizit an. Bestimmen Sie $\Phi(1), \Phi(i)$ und $\Phi(e^{i\varphi})$ für $\varphi \in [0, 2\pi)$.

(iii) Zeigen Sie $\det(\Phi(z)) = |z|^2$. Wie hängen $\Phi(z)$ und $\Phi(\bar{z})$ zusammen?

Aufgabe 5.

(i) Zeigen Sie, dass jeder Kreis

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| = r\} \quad \text{mit } r > 0 \text{ und } a \in \mathbb{C}$$

durch eine Gleichung der Form

$$\alpha z\bar{z} + \gamma z + \bar{\gamma}\bar{z} + \delta = 0 \quad \text{mit } 0 \neq \alpha, \delta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C} \text{ und } \gamma\bar{\gamma} > \alpha\delta$$

beschrieben werden kann und umgekehrt jede solche Gleichung einen Kreis beschreibt.

(ii) Seien $\lambda \in [0, \infty) \setminus \{1\}$ und $w_1 \neq w_2$ zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass es sich bei der Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \frac{|z - w_1|}{|z - w_2|} = \lambda \right\}$$

um einen Kreis handelt.