UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 2
Abgabe: Donnerstag, 4.5.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(i) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 0.6 der Vorlesung, indem Sie zeigen, dass jedes kompakte Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist.

Bemerkung: Allgemeiner sind auch alle Intervalle der Form $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) zusammenhängend. Dies müssen Sie jedoch nicht beweisen.

(ii) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie, dass Ω genau dann zusammenhängend ist, wenn jede lokal konstante Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ konstant ist.

Bemerkung: Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *lokal konstant*, wenn für alle $z \in \Omega$ eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z existiert, sodass die Restriktion $f|_U : U \to \mathbb{C}$ konstant ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir setzen

$$\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} |\ \overline{z} \in \Omega\}$$

und

$$g : \ \Omega^* \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \overline{f(\overline{z})}.$$

Zeigen Sie, dass g auf Ω^* holomorph ist und dass gilt

$$g'(z) = \overline{f'(\overline{z})} \qquad \text{für alle } z \in \Omega^*.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(i) Untersuchen Sie, in welchen Punkten aus $\mathbb{C}$ die durch die folgenden Vorschriften bestimmten Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind:

(a) $f(x + iy) := \left(x^3y^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + i\left(x^2y^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3\right)$

(b) $f(z) := z\,\mathrm{Re}(z)$

bitte wenden

(ii) Wir betrachten die beiden Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die gegeben sind durch

$$f_1(z) := \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{z^4}\Big), & \text{falls } z \neq 0 \\ 0, & \text{falls } z = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(z) := \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4}, & \text{falls } z \neq 0 \\ 0, & \text{falls } z = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass ...

(a) ... die Funktion f_1 auf ganz $\mathbb{C}$ reell partiell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, im Punkt 0 aber nicht komplex differenzierbar ist.

(b) ... die Funktion f_2 stetig und auf ganz $\mathbb{C}$ reell partiell differenzierbar ist, im Punkt 0 die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, dort jedoch nicht komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.**

(i) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^2(\Omega)$ holomorph. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$u = \mathrm{Re}(f) \colon \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad v = \mathrm{Im}(f) \colon \Omega \to \mathbb{R}$$

beide harmonisch sind.

Bemerkung: Wir nennen eine Funktion $h \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, also eine im reellen Sinne zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion

$$h \colon \Omega \to \mathbb{R}, \ x + iy = (x, y) \mapsto h(x + iy) = h(x, y),$$

harmonisch, falls $\Delta h \equiv 0$ auf Ω gilt, wobei wir mit $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ den *Laplace Operator* bezeichnen.

(ii) Sei $u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x + iy) := x^3 - 3xy^2 - 3x + 1.$$

Rechnen Sie explizit nach, dass u auf $\mathbb{C}$ harmonisch ist, und bestimmen Sie anschließend eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$, sodass $\mathrm{Re}(f) = u$.

(iii)* Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^2(\Omega)$ holomorph. Wir nehmen zusätzlich an, dass f auf Ω keine Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$h \colon \Omega \to \mathbb{R}, \ z \mapsto \log|f(z)|$$

auf Ω harmonisch ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeigen Sie:

(i) Ist $f \in \mathcal{O}(G)$ gegeben, so dass $f'(z) = 0$ für alle $z \in G$ gilt, dann ist f konstant.

(ii) Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f(G) \subseteq \mathbb{R}$ oder $f(G) \subseteq i\mathbb{R}$ ist konstant.