UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 11.5.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist genau dann in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell (total) differenzierbar, wenn Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + \beta \overline{h} + o(|h|) \qquad \text{für } h \to 0.$$

In diesem Fall sind α und β eindeutig bestimmt und gegeben durch die *Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen*

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big) \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big).$$

(b) Die Funktion f ist genau dann auf Ω holomorph, wenn f auf Ω reell differenzierbar ist und gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \qquad \text{für alle } z_0 \in \Omega. \tag{1}$$

In diesem Fall ist $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ für alle $z_0 \in \Omega$.

(c) Wie hängt die Bedingung (1) mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zusammen?

Aufgabe 2 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktion, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)}.$$

(b) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ zwei in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktionen, so gilt

$$\frac{\partial (fg)}{\partial z}(z_0) = f(z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)g(z_0).$$

bitte wenden

(c)* Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine in einem Punkt $z_0 \in \Omega$ reell partiell differenzierbare Funktion, ferner $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $f(z_0) \in \Omega'$ und $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ in $f(z_0)$ reell partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(f(z_0))\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0).$$

Wie lauten die zu (b) und (c) analogen Rechenregeln für die partielle Ableitung nach $\overline{z}$?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n \overline{z}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z)$

Hinweis: Hierbei bezeichnet $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Exponentialfunktion; vgl. Bemerkung 0.3 der Vorlesung. Sie dürfen (ohne Beweis) die aus der Analysis I bekannte Identität $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ für $z, w \in \mathbb{C}$ benutzen.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Zeigen Sie:

(a) Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, dann ist auch die Funktion $f \cdot g \colon \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)g(z)$ an der Stelle z_0 differenzierbar, und es gilt

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(b) Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar und gilt $f(z_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{1}{f} \colon \Omega \backslash f^{-1}(\{0\}) \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie Lemma 1.11 der Vorlesung.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen. Weiter sei $\psi : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $\psi(I) \subset \Omega$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\varphi :\ I \to \mathbb{C},\ t \mapsto f(\psi(t))$$

differenzierbar ist und dass für die Ableitung φ' gilt

$$\varphi'(t) = f'(\psi(t))\psi'(t) \qquad \text{für alle } t \in I.$$