UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 4
Abgabe: Donnerstag, 18.5.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die Aussagen von Bemerkung 2.13 der Vorlesung: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg. Dann ist die Abbildung

$$\int_\gamma \cdot \,\mathrm{d}z\colon\ C(\gamma^*) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

linear und beschränkt mit

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma)\max_{z\in\gamma^*}|f(z)|$$

für alle $f \in C(\gamma^*)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Sei $\dot{D}(0,1) = D(0,1) \setminus \{0\}$ die punktierte Einheitskreisscheibe und

$$f\colon\ \dot{D}(0,1) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Besitzt f eine holomorphe Stammfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom, d.h. es gibt Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, sodass gilt

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Weiter seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ und $\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}$ der Weg, der den Rand der Kreisscheibe $D(z_0, r)$ im positiven Sinn durchläuft. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} \overline{p(z)}dz = 2\pi i r^2 \overline{p'(z_0)}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für spezielle Polynome p.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Für $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ betrachten wir den Weg $\gamma := \gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}$. Sei nun $f \in C(\gamma^*)$ eine stetige Funktion auf der Spur γ^* von γ. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{f}\colon\ D(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

holomorph ist und dass die Ableitung von $\tilde{f}$ gegeben ist durch

$$\tilde{f}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$. Wir definieren

$$S := \{z = re^{it} \in \mathbb{C}\colon r \geq 0,\ 0 \leq t \leq \alpha\}.$$

Weiter sei $f\colon S \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, für die der Grenzwert

$$L = \lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in S}} z f(z)$$

existiert. Zeigen Sie, dass für den Weg $\gamma_r : [0, \alpha] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r(t) = re^{it}$ gilt

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i\alpha L.$$

(b) Wir betrachten nun die beiden Wege γ_r und β_r, die gegeben sind durch

$$\gamma_r(t) = re^{it},\ t \in [0, \pi] \qquad \text{und} \qquad \beta_r(t) = t,\ t \in [-r, r].$$

Skizzieren Sie den Summenweg $\tilde{\gamma}_r := \beta_r + \gamma_r$ und berechnen Sie

$$\operatorname{Im}\left(\int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{1}{z + i}\,\mathrm{d}z \right).$$

(c) Berechnen Sie mithilfe von (a) und (b) das reelle uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zusatzaufgabe* (5 Punkte)**.** Beweisen Sie das *allgemeine Intervallschachtelungsprinzip*: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen von X mit $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x,y \in A_n} d(x, y) = 0.$$

Dann gibt es ein $a \in X$, sodass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a\}.$$