UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 5
Abgabe: Freitag, 26.5.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen über eine Funktion $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ äquivalent sind:

(i) Die Funktion F ist holomorph auf Ω und es gilt $F' = f$.

(ii) Für jeden stückweise glatten Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega$ gilt
$$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine auf G holomorphe und nullstellenfreie Funktion. Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ gibt mit
$$f(z) = \exp(g(z)) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ seien $\alpha, \beta\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch
$$\alpha(t) = a\cos(2\pi t) + ia\sin(2\pi t) \qquad \text{bzw.}$$
$$\beta(t) = a\cos(2\pi t) + ib\sin(2\pi t).$$

(a) Man zeige:
$$\int_\alpha \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\beta \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z.$$
Hinweis: Benutzen Sie den Cauchyschen Integralsatz.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel das Integral
$$\int_{\gamma_{0,1,\circlearrowleft}} \frac{1}{z^2 + 2az + 1}\,\mathrm{d}z.$$

bitte wenden

(b) Berechnen Sie mit Aufgabenteil (a) das reelle Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Liouville die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion, dann gilt $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.

(b) Gibt es zu einer holomorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen w_1 und w_2, so dass die Bedingung

$$f(z+w_1) = f(z+w_2) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

erfüllt ist, dann ist f konstant.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Wir betrachten die Funktion

$$f:\ \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Zeigen Sie, dass f holomorph ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$ erfüllt, wobei wir $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\}$ definieren. Ist f beschränkt auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$?

(b) Wir setzen $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}|\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Geben Sie eine stetige, unbeschränkte Funktion $f : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ an, deren Restriktion $f|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist und die auf $\partial\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Warum stehen diese Beispiele nicht im Widerspruch zum Maximumsprinzip?

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Es seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, γ ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$ und $g\colon \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Funktion

$$g(w,\cdot)\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto g(w,z)$$

für jedes feste $w \in \gamma^*$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass auch

$$h\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto h(z) = \int_\gamma g(w,z)\,\mathrm{d}w$$

holomorph ist und die Ableitung von h gegeben ist durch

$$h'(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} g(w,z)\,\mathrm{d}w.$$

Geben Sie damit einen alternativen Beweis von Satz 2.25 der Vorlesung.