UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 1.6.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

für jeden der folgenden Wege γ

$$\gamma = \gamma_{i,1,\circlearrowleft}, \qquad \gamma = \gamma_{-i,1,\circlearrowleft} \qquad \text{und} \qquad \gamma = \gamma_{0,3,\circlearrowleft}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ berechne man das Integral

$$\int_{\gamma_{1,1,\circlearrowleft}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n \mathrm{d}z.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 4.2 der Vorlesung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $C(\Omega)$. Dann gilt

(i) Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ ist genau dann eine Cauchy-Folge bzgl. der kompakten Konvergenz auf Ω, wenn sie lokal eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist (d.h., wenn es für jedes $z \in \Omega$ ein $r > 0$ mit $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$ gibt, sodass $(f_n|_{\overline{D(z,r)}})_{n=1}^\infty$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge ist).

(ii) Ist die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge bzgl. der kompakten Konvergenz auf Ω, so konvergiert sie kompakt auf Ω gegen eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$.

(ii) Ist $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg mit $\gamma^* \subset \Omega$ und konvergiert die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ kompakt gegen eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Lemma 4.5 der Vorlesung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge aus $C(\Omega)$.

(i) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert genau dann normal in Ω, wenn zu jedem $z \in \Omega$ ein $r > 0$ existiert mit $\overline{D(z,r)} \subset \Omega$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\overline{D(z,r)}} < \infty.$$

(ii) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal in Ω, dann konvergiert die Folge $\big(\sum_{n=0}^{N} f_n\big)_{N=0}^{\infty}$ kompakt auf Ω gegen eine stetige Funktion f. Wir schreiben dann

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

In diesem Fall gilt für jeden stückweise glatten Weg $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^* \subset \Omega$, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

(iii) Sind alle f_n auf Ω holomorph und konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ normal in Ω, dann ist $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ebenfalls holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$ normal in Ω mit

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine (formale) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0 und Koeffizienten $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Beweisen Sie, dass für den Konvergenzradius $R \in [0,\infty]$ dieser Potenzreihe die *Formel von Cauchy-Hadamard*

$$R = \Big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1}$$

gilt, wobei wir die Rechenregeln $\infty^{-1} = 0$ und $0^{-1} = \infty$ vereinbaren.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

für jede der beiden Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, die gegeben sind durch

$$\begin{cases} a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} & n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad a_n = \begin{cases} a^n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ b^n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (\text{für } b > a > 0).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom vom Grad n. Zeigen Sie: Gibt es Konstanten $R > 0$ und $C > 0$, sodass die Bedingung

$$|f(z)| \le C|P(z)| \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \ge R$$

erfüllt ist, dann ist f ein Polynom vom Grad $\le n$.