UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 7.6.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Es bezeichne $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, d.h. $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$. Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, die auf $\mathbb{D}$ durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dargestellt werde. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben und wir setzen $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{m})$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion

$$g : \ \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\zeta^k z)$$

auf $\mathbb{D}$ holomorph ist und dort die folgende Potenzreihendarstellung besitzt:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} z^{nm}$$

(b) Beweisen Sie mit (a): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!} = \frac{1}{2}\big(\cos(1) + \cosh(1)\big)$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$S_n := \{z \in \mathbb{C} |\ (2n-1)\pi < \mathrm{Im}(z) < (2n+1)\pi\}.$$

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induziert eine bijektive Abbildung $\exp : S_n \to \mathbb{C}_-$ auf die *geschlitzte Zahlenebene*

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) = 0,\ \mathrm{Re}(z) \leq 0\}.$$

(b) Die zugehörige Umkehrabbildung $L_n : \mathbb{C}_- \to S_n$ ist holomorph und erfüllt

$$L_n'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_- \qquad \text{und} \qquad L_n(1) = 2n\pi i.$$

Bemerkung: Im Fall $n = 0$ nennen wir $\mathrm{Log}(z) = L_0(z)$ den *Hauptzweig des Logarithmus* und im Fall $n \neq 0$ nennen wir $\mathrm{Log}_n(z) = L_n(z)$ einen *Nebenzweig des Logarithmus*.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den in Aufgabe 2 definierten Hauptzweig des Logarithmus $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n in der Potenzeihenentwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

von $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ um einen beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}_-$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe in (1) den Konvergenzradius $R = |z_0|$ besitzt.

(c) Folgern Sie, dass $D(z_0, R) \cap \mathbb{C}_-$ im Fall $\operatorname{Re}(z_0) < 0$ in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt, und vergleichen Sie auf jeder dieser Zusammenhangskomponenten die durch (1) gegebene holomorphe Funktion $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ mit dem Hauptzweig Log. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Finden Sie $r > 0$ und holomorphe Funktionen $f\colon D(0, r) \to \mathbb{C}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllen, oder zeigen Sie, dass es keine solche Funktion geben kann:

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n}$ für hinreichend große Werte von n;

(b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2 - 1}$ für hinreichend große Werte von n;

(c) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(d) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Gegeben seien die folgenden beiden, aus der Vorlesung bekannten Potenzreihen

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{und} \qquad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

(b) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \sin(z + w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \\ \cos(z + w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w). \end{aligned}$$