UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc. Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 8
Abgabe: Freitag, 15.6.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir wollen in dieser Aufgabe einen alternativen Beweis des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen erarbeiten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Gegeben seien $r_0 > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, sowie eine holomorphe Funktion $f\colon D(z_0, r_0) \to \mathbb{C}$. Wir betrachten die Potenzreihendarstellung
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
von f auf $D(z_0, r_0)$. Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < r_0$ gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 \,\mathrm{d}t.$$

(b) Beweisen Sie unter Verwendung von (a) die folgende Version des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen:

Es sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Besitzt $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ eine lokale Maximumstelle, d.h.
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall z \in D(z_0, \varepsilon)\colon \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|,$$
dann ist die Funktion f auf G konstant.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die bei z_0 einen Pol der Ordnung m habe. Zeigen Sie:

(a) Die nach Satz 6.5 der Vorlesung existierenden Zahlen $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ mit $c_m \neq 0$ und der Eigenschaft, dass die Funktion
$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$
in z_0 eine hebbare Singularität besitzt, sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt und für $r_0 > 0$ mit $\dot{D}(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ und jedes $0 < r < r_0$ gilt
$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0, r, \circlearrowleft}} f(z)(z - z_0)^{k-1} \,\mathrm{d}z \qquad \text{für } k = 1, \ldots, m.$$

bitte wenden

(b) Für jedes $r_0 > 0$ mit $\dot{D}(z_0, r_0) \subseteq \Omega$ besitzt f auf $\dot{D}(z_0, r_0)$ eine Reihendarstellung der Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Koeffizienten $(a_n)_{n=-m}^{\infty}$ bestimmt sind durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

für jedes beliebige $0 < r < r_0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der durch die folgenden Vorschriften gegebenen holomorphen Funktionen und geben Sie im Fall eines Pols dessen Ordnung an:

(a) $z \mapsto \dfrac{z^3 + 3z}{z^2 + 1}$

(b) $z \mapsto \dfrac{\cosh(2z) - \cosh(z)}{z^2}$ mit $\cosh(z) = \dfrac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) = \cos(iz)$

(c) $z \mapsto \dfrac{1}{\sin(z) - \cos(z)}$

(d) $z \mapsto \dfrac{\exp(\frac{1}{z-1})}{\exp(z) - 1}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei f eine holomorphe Funktion mit einer isolierten Singularität $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist a eine Polstelle der Ordnung m von f', so gilt $m \geq 2$ und f hat in a einen Pol der Ordnung $m - 1$.

(b) Ist a eine hebbare Singularität für f', so ist a auch eine hebbare Singularität für f.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in \Omega$. Zeigen Sie: Hat eine holomorphe Funktion $f : \Omega \backslash \{a\} \to \mathbb{C}$ bei a einen Pol erster Ordnung, so hat die Funktion

$$g : \ \Omega \backslash \{a\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \exp(f(z))$$

eine wesentliche Singularität in a.