UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

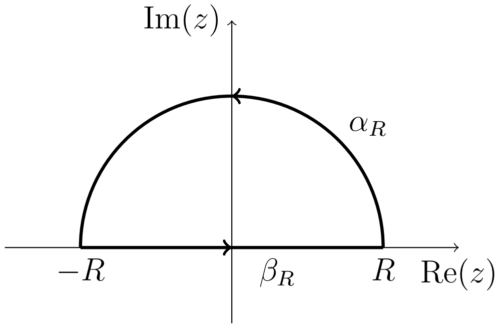
Blatt 9
Abgabe: Donnerstag, 22.6.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Seien G ein sternförmiges Gebiet, $z_1, z_2 \in G$ mit $z_1 \neq z_2$ und $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_1, z_2\})$. Wir nehmen an, dass z_1 und z_2 Pole der Ordnung m_1 bzw. m_2 von f sind, und bezeichnen mit H_1 bzw. H_2 die zugehörigen Hauptteile von f. Zeigen Sie, dass
$$f - H_1 - H_2$$
zu einer auf G holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann.

(b) Charakterisieren Sie alle isolierten Singularitäten der durch die Vorschrift
$$f(z) := \frac{1}{1 + z^4}$$
definierten holomorphen Funktion f und bestimmen Sie anschließend die Hauptteile von f in den beiden Polstellen z_1 und z_2, die in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ liegen.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Wir betrachten wieder die holomorphe Funktion f aus Aufgabe 1 (b). Für $R > 0$ sei $\gamma_R := \alpha_R + \beta_R$ der Summenweg, dessen glatte Teilwege α_R und β_R gemäß der nachfolgenden Abbildung gewählt sind.



(a) Bestimmen Sie mit Aufgabe 1 für $R > 1$ den Wert des Integrals
$$\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z.$$

bitte wenden

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_R} f(z)\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\beta_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

(c) Berechnen Sie mithilfe von (a) und (b) das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2+b^2)+2ab\cos(t)}\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, der den Rand der Kreisscheibe um a mit Radius b im positiven Sinn durchläuft, $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** In dieser Aufgabe wollen wir eine globale Version der Cauchyschen Integralformel für Sterngebiete beweisen: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f \in \mathcal{O}(G)$ und γ ein stückweise glatter, geschlossener Weg in G. Dann gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \qquad \text{für alle } z \in G \setminus \gamma^*.$$

Hinweis: Imitieren Sie für $k = 0$ den Beweis der Cauchyschen Integralformel für Kreisscheiben (Satz 2.22); verwenden Sie dabei anstelle des Zentrierungslemmas den Riemannschen Hebbarkeitssatz. Verwenden Sie für allgemeines k die Zusatzaufgabe von Blatt 5.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise glatter, geschlossener Weg und $z \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht auf der Spur γ^* von γ liegt. Beweisen Sie: Gibt es stückweise stetig differenzierbare Funktionen $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\rho : [a, b] \to (0, \infty)$, sodass

$$\gamma(t) - z = \rho(t)\exp(i\theta(t)) \qquad \text{für alle } t \in [a, b]$$

gilt, dann ist

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\}$. Skizzieren Sie einen (stückweise) glatten, geschlossenen Weg γ in Ω, der

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$$

erfüllt, aber **nicht** homotop in Ω zu einem konstanten Weg ist (d.h., zu einem Weg, dessen Spur nur aus einem Punkt besteht). Ein Beweis, dass die von Ihnen skizzierte Kurve γ die geforderten Bedingungen erfüllt, ist nicht nötig.