UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 10
Abgabe: Donnerstag, 29.6.2012, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zu $r_1, r_2 > 0$ mit $r_1 \neq r_2$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ betrachten wir den geschlossenen Weg

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto r_1 e^{in_1 t} + r_2 e^{in_2 t}.$$

Zeigen Sie $0 \notin \gamma^*$ und

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \begin{cases} n_1, & \text{falls } r_1 > r_2 \\ n_2, & \text{falls } r_1 < r_2 \end{cases}.$$

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 7.6 oder Satz 7.7 der Vorlesung.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Wir wollen in dieser Aufgabe einige Resultate, die wir zuvor für Sterngebiete bewiesen haben, auf einfach zusammenhängende Gebiete verallgemeinern:

(a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie, dass jede holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt.

(b) In Aufgabe 1 auf Blatt 5 haben wir gesehen, dass es auf einem Sterngebiet G zu jedem nullstellenfreien $f \in \mathcal{O}(G)$ eine holomorphe Funktion $g\colon G \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = \exp(g(z)) \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Gilt diese Aussage auch noch auf allen einfach zusammenhängenden Gebieten G? (Ein Gegenbeispiel oder eine kurze Begründung reichen hier aus.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\Delta f.$$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass es eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\mathrm{Re}(f) = u.$$

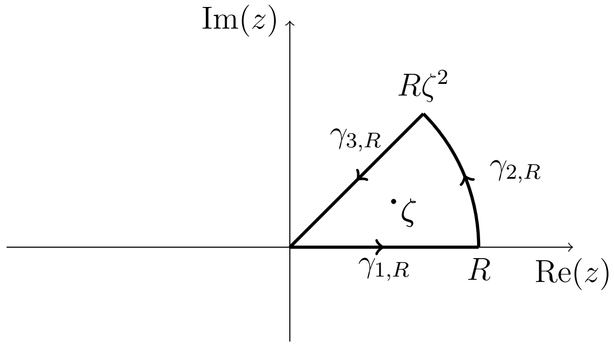
Hinweis: Zeigen Sie zunächst unter Verwendung von (a), dass $\frac{\partial u}{\partial z}$ holomorph ist. Verwenden Sie anschließend Aufgabe 2 (a).

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $0 < m < n$ natürliche Zahlen. Wir betrachten

$$f \colon \mathbb{C} \setminus \{\zeta^{2k-1} \colon k = 1, \dots, n\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{z^{m-1}}{1+z^n},$$

wobei wir $\zeta := \exp(i\frac{\pi}{n})$ setzen, und für $R > 0$ den geschlossenen Weg $\gamma_R = \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R} + \gamma_{3,R}$, dessen glatte Teilwege gemäß der nachfolgenden Abbildung gewählt sind.



(a) Bestimmen Sie mithilfe von Satz 7.12 der Vorlesung für $R > 1$ den Wert des Integrals

$$\int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x, \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

und

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{3,R}} f(z)\mathrm{d}z = -\zeta^{2m} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x.$$

(c) Folgern Sie mithilfe der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (a) und (b), dass gilt

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)\right)^{-1}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ nullstellenfrei. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f := f_1 \cdots f_n$ gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \qquad \text{für alle } z \in \Omega.$$

(b) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom und sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg, auf dessen Spur keine Nullstellen von p liegen. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\mathrm{d}z = \sum_{z\in\mathcal{N}(p)} \operatorname{ord}(p,z)\operatorname{Ind}_\gamma(z)$$

wobei $\mathcal{N}(p) := \{z \in \mathbb{C} \colon p(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von p und $\operatorname{ord}(p,z) \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle $z \in \mathcal{N}(p)$ bezeichnet.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass p nach dem Fundamentalsatz der Algebra vollständig in Linearfaktoren zerfällt, und verwenden Sie Aufgabenteil (a).