UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Sommersemester 2017

Blatt 11

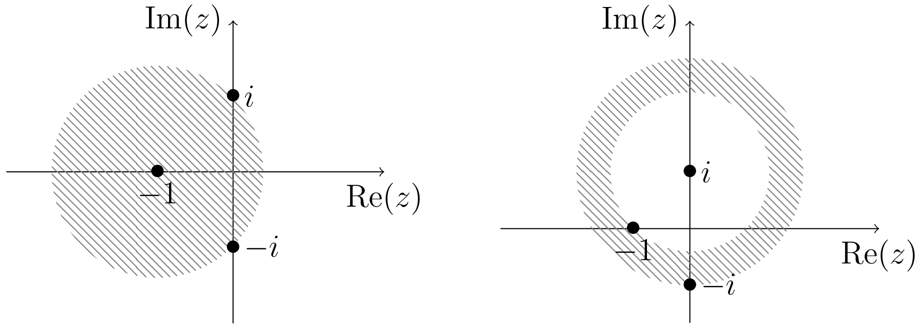
Abgabe: Donnerstag, 6.7.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.**

(a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\setminus\{-i,i,-1\}\to\mathbb{C},\qquad z\mapsto \frac{1}{(z+1)(z^2+1)}.$$

Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf den folgenden Ringgebieten.



(i) $R(-1;0,\sqrt{2})$ (ii) $R(i;\sqrt{2},2)$

(b)* Widerspricht die folgende "Identität" der in Satz 8.3 der Vorlesung behaupteten Eindeutigkeit der Laurententwicklung?

$$0=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}z^n$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $r>0$ sei eine Funktion $H\in\mathcal{O}(\Delta(z_0,r))$ mit der Eigenschaft $\lim_{|z|\to\infty}H(z)=0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\widetilde{H}:\ \dot{D}_{1/r}(0)\to\mathbb{C},\ z\mapsto H\Big(z_0+\frac{1}{z}\Big)$$

holomorph ist und durch $\widetilde{H}(0):=0$ zu einer Funktion $\widetilde{H}\in\mathcal{O}(D_{1/r}(0))$ ergänzt werden kann. Geben Sie auch eine Formel für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von $\widetilde{H}$ um den Punkt 0 an.

bitte wenden

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass H auf $\Delta(z_0, r)$ eine Darstellung der Form

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z - z_0)^n}$$

besitzt, wobei sich die Koeffizienten mit der Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,\rho,\circlearrowleft}} H(z)(z - z_0)^{n-1}\, dz \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für ein beliebiges $\rho > r$ berechnen lassen.

Aufgabe 3 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*). Seien $-\infty \leq s_1 < s_2 \leq \infty$ gegeben. Wir betrachten den Horizontalstreifen

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid s_1 < \mathrm{Im}(z) < s_2\}$$

und eine auf S holomorphe Funktion $f : S \to \mathbb{C}$, die periodisch mit der Periode 1 ist, d.h.

$$f(z+1) = f(z) \qquad \text{für alle } z \in S.$$

(a) Zeigen Sie, dass S unter der Abbildung φ, die gegeben ist durch $\varphi(z) = \exp(2\pi i z)$ auf ein Ringgebiet $R = R(0; r_1, r_2)$ abgebildet wird. Bestimmen Sie r_1 und r_2.

(b) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass es eine holomorphe Funktion $g : R \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $f(z) = g(\exp(2\pi i z))$ für alle $z \in S$ gilt. (Tatsächlich existiert immer eine solche Funktion, dies müssen Sie hier jedoch nicht beweisen.)
Zeigen Sie, dass sich f auf S in eine normal konvergente *(komplexe) Fourierreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi i n z), \qquad z \in S,$$

entwickeln lässt, wobei die *Fourierkoeffizienten* a_n eindeutig und durch die Formel

$$a_n = \int_0^1 f(x+iy) \exp\big(-2\pi i n(x+iy)\big)\mathrm{d}x$$

für beliebiges $s_1 < y < s_2$ bestimmt sind.

(c)* Bestimmen Sie die Fourierreihen der Funktionen $z \mapsto \sin(2\pi z)$ und $z \mapsto \cos(2\pi z)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $f : R \to \mathbb{C}$ eine auf dem Ringgebiet $R := R(z_0; r_1, r_2)$ mit $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ holomorphe Funktion. Weiter sei γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg in R mit der Eigenschaft $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 1$.
Beweisen Sie: Lässt sich f auf γ^* gleichmäßig durch eine Folge holomorpher Polynome approximieren, dann gibt es eine Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(D(z_0, r_2))$ mit $\widetilde{f}|_R = f$.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Seien $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$. Zeigen Sie: Hat $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung, so gilt für jedes $r > 0$ mit $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0,r,\circlearrowleft}} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{m-1} \big((z - z_0)^m f(z)\big).$$