UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Tobias Mai
M.Sc Felix Leid

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie
Sommersemester 2017

Blatt 12
Abgabe: Donnerstag, 13.7.2017, 12:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir wollen in dieser Aufgabe die Resultate von Satz 9.4 beweisen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega$.

(a) Die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ habe einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Überzeugen Sie sich mithilfe von Aufgabe 5 auf Blatt 11 davon, dass gilt
$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{m-1} \left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

(b) Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $f(z_0) \neq 0$, $g'(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(c) Seien $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\})$ mit Pol erster Ordnung in z_0 und $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Res}(f \cdot g; z_0) = g(z_0) \operatorname{Res}(f; z_0).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $a \in (1, \infty)$. Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^\pi \frac{1}{(a + \cos(t))^2} \mathrm{d}t.$$
Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie des Integranden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$
Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie des Integranden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $a, b > 0$ und $a \neq b$. Zeigen Sie, dass
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right).$$

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte + 3 Zusatzpunkte*)**.**

(a) Seien $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ paarweise verschiedene Zahlen, $f\colon \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_l\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft, dass es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gibt außerhalb dem $|z^2 f(z)|$ nach oben beschränkt ist, und

$$g(z) := \pi \cot(\pi z) f(z).$$

Zeigen Sie

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{n=N} f(n) = -\sum_{j=1}^{l} \operatorname{Res}(g; a_j).$$

(b) Verwenden Sie Teil (a) dieser Aufgabe, um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(c)* Folgern Sie mithilfe von Teil (b), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

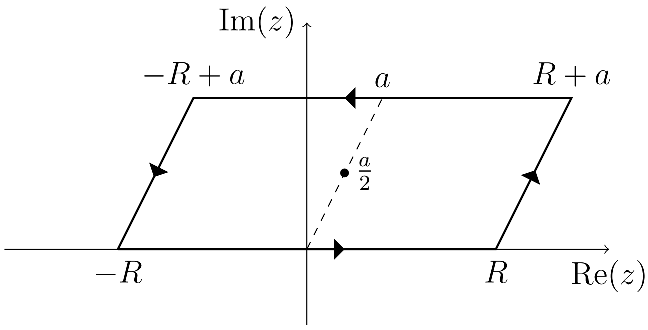
Zusatzaufgabe* (10 Zusatzpunkte*)**.** Wir wollen in dieser Aufgabe das Gauß'sche Fehlerintegral mit funktionentheoretischen Mitteln berechnen: Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi},$$

indem Sie die Funktion

$$f\colon z \mapsto \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)}, \qquad \text{wobei } a := e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\pi},$$

über das folgende Parallelogramm integrieren und anschließend den Grenzübergang $R \to \infty$ vollziehen.



Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $f(z) - f(z+a) = \exp(-z^2)$.